HOJA DE EJERCICIOS 2

Análisis Matemático.

CURSO 2017–2018

Problema 1. Dada $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$ comprueba que 2 es un autovalor de AA^t.
Calcula la norma de A considerada como operador $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

Problema 2. Considera las matrices $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{bmatrix}$ como operadores $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
Demuestra que $\|A(a)\| \geq \sqrt{1+a^2}$ (examina las imágenes de la base estándar).
¿Cuáles son los autovalores de $A(a)$? ¿Se puede estimar la norma de operador a partir de los autovalores?

Problema 3. Determina el interior, la frontera y la adherencia (el cierre) de cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \left[-1, \frac{1}{k}\right)$ en $\mathbb{R}$.

b) $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x \leq y\}$ en $\mathbb{R}^2$.

d) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\right\}$ en $\mathbb{R}$.

e) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1)$ en $\mathbb{R}$.

f) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ en $\mathbb{R}$.

g) $\mathbb{Q} \times [0,1]$ en $\mathbb{R}^2$.

h) Una variedad afín en $\mathbb{R}^n$.

i) Una cónica en $\mathbb{R}^2$.

j) Una cuádrica en $\mathbb{R}^3$.

k) El grafo $\{(x, f(x))\colon x \in \mathbb{R}^n\}$ en $\mathbb{R}^{n+m}$ de una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Problema 4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \varnothing$, y recordemos la función dist definida en el problema 9 de la Hoja 1. Se definen, para cada $r > 0$,

$$A_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < r\}, \qquad A^r = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) \leq r\}.$$

Prueba lo siguiente:

a) A_r es abierto y A^r es cerrado.

b) $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{r>0} A^r = \bigcap_{r>0} A_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.

Problema 5. Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio normado.

a) Dados $x_0 \in \mathbb{V}$ y $r > 0$, prueba que la adherencia de la bola abierta $B(x_0, r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$.

b) Considera la distancia $\tilde{d} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{d}(x,y) = \min\{\|x-y\|, 1\}$ (que **no** es la distancia asociada a ninguna norma).

Demuestra que la norma $\|\cdot\|$ y la distancia $\tilde{d}$ definen los mismos abiertos en $\mathbb{V}$ (por lo tanto, también definen los mismos cerrados).

Demuestra que en el espacio métrico $(\mathbb{V}, \tilde{d})$ la adherencia de la bola abierta unidad $B_{\tilde{d}}(0,1)$ es distinta de la bola cerrada unidad $\overline{B}_{\tilde{d}}(0,1)$.

Problema 6. Dados $A \subset \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$, definimos $A_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$. Demuestra que:

a) Si A es abierto en el plano entonces A_y es abierto en $\mathbb{R}$.

b) Si A es cerrado en el plano entonces A_y es cerrado en $\mathbb{R}$.

Problema 7. Demuestra las siguientes propiedades acerca de la adherencia y el interior de un conjunto:

a) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$ e $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

d) Pon ejemplos de $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$. Análogamente, ejemplos tales que $\operatorname{int}(A \cup B) \neq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

<u>Problema</u> 8. Sea $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sean $A, B \subset \mathbb{V}$. Se define $A + B = \{a + b \colon a \in A,\, b \in B\}$. Prueba que si A es abierto entonces $A + B$ es abierto.

<u>Problema</u> 9. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y d una distancia en $\mathbb{V}$. Demuestra que son equivalentes:

1. Existe una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{V}$ tal que se cumple la identidad $d(x, y) = \|x - y\|$.
2. La función d cumple las dos condiciones siguientes:
   a) $d(cx, cy) = |c|\, d(x, y)$.
   b) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Comprueba que $d_1(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$ y $d_2(x, y) = |x - y| + \big|\, |x| - |y| \,\big|$ son distancias en la recta real $\mathbb{R}$ y que ambas definen los mismos abiertos que la distancia estándar $|x - y|$.
Comprueba que d_1 cumple b) pero no a).
Comprueba que d_2 cumple a) pero no b).