HOJA DE EJERCICIOS 1
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

---

**Problema 1.** Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial, y sea $\|\cdot\|$ su norma asociada. Prueba las dos identidades siguientes y da una interpretación:

a) Identidad del paralelogramo: $2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$.

b) Identidad de polarización: $4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$.

---

**Problema 2.** Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a>0$ y $ac>b^2$. Se define $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ como

$$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}.$$

Prueba que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

---

**Problema 3.** Demuestra que en un espacio normado $(E,\|\cdot\|)$ se tiene que para cualesquiera $u,v\in E$,

$$\big|\,\|u\|-\|v\|\,\big|\le\|u-v\|\,.$$

---

**Problema 4.** Demuestra que las siguientes funciones son normas en $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\|' \;=\; \text{máx}\left(2|x|,\sqrt{x^2+y^2}\right)\quad,\quad \|(x,y)\|'' \;=\; \text{máx}\left(|x-y|,|y|\right)\,.$$

Haz un dibujo de la bola unidad de cada una de ellas.
Comprueba que la desigualdad triangular no es estricta (o sea, es una igualdad) para la norma $\|\cdot\|'$ y el par de vectores $v=(1,0),w=(1,1)$, a pesar de que son vectores linealmente independientes. Relaciona esto con la forma de la bola unidad de $\|\cdot\|'$.

---

**Problema 5.** Sean $1\le p<q<\infty$. Demuestra que si $\|\omega\|_p=1$ entonces $\|\omega\|_q\le 1$. Deduce que, fijado un vector $v$, el número $\|v\|_p$ es función decreciente de $p$.
Dado un vector $u\in\mathbb{R}^n$, demuestra que:

$$\lim_{p\to\infty}\|u\|_p=\|u\|_\infty.$$

*Indicación:* Pruébalo primero para $\|u\|_\infty=1$, distingue entre las componentes $u_i$ con $|u_i|=1$ y $|u_i|<1$.

---

**Problema 6.** De las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, decide cuáles son homogéneas o positivamente homogéneas. Indica, en su caso, el grado:

a) $f(x,y,z)=x^2-3xy+\sqrt{y^4+z^4}$.

b) $f(x)=3$.

c) $f(x,y)=-x+y-2$.

d) $f(x,y,z)=\dfrac{xyz-x^2y}{x^2+y^2+2z^2}$ para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$; $f(0,0,0)=0$.

e) $f(x,y)=-x^3\,\text{sen}\,\dfrac{y}{x}$ para $x\neq0$; $f(0,y)=0$.

f) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}$.

g) $f(x,y)=\sqrt{|x|^3+|y|^3}$.

h) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$.

---

**Problema 7.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Demuestra las siguientes propiedades, válidas para cualesquiera $a,b,c\in X$ y $r,s>0$:

a) $|d(a,b)-d(b,c)|\le d(a,c)$.

b) Si $a,b\in B(c,r)$ entonces $d(a,b)<2r$.

c) Si $B(a,r)\cap B(b,s)\neq\varnothing$ entonces $d(a,b)<r+s$.

---

**Problema 8.** Sea $X$ un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y, z \in X$:

a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

b) $d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$.

Demuestra que $d$ es una distancia en $X$.

---

**Problema 9.** En un espacio métrico $(X, d)$ se define, para $x \in X$ y $A \subset X$, $A \neq \varnothing$,

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Demuestra que para todos $x, y \in X$,

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y).$$

---

**Problema 10.** Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} ,$$

halla su norma, como operadores lineales, en los siguientes casos:

a) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$,

b) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$,

c) $B : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

---

**Problema 11.** Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y un número $1 < p < \infty$, halla la norma de $C$, como operador ineal, en los siguientes casos:

a) $C : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$,

b) $C : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$.

*Indicación:* en el caso b) considera sólo vectores $v = (x, y)$ con $x, y \geq 0$ y $x + y = 1$ ¿por qué es esto suficiente?

---

**Problema 12.** Dada una matriz $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$, demuestra los enunciados siguientes:

a) La norma de $A$, considerada como operador lineal $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$, es

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Es decir, la norma de $A$ es el máximo de las normas-1 de las columnas de $A$.

b) La norma de $A$, considerada como operador lineal $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$, es

$$\max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Es decir, la norma de $A$ es el máximo de las normas-1 de las filas de $A$.

c) La norma de $A$, considerada como operador lineal $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$, es la raíz cuadrada del máximo de los autovalores de $A^T A$.

---

**Problema 13.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, consideradas como operadores lineales $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, comprueba que

$$\|AB\| = \|A\| \, \|B\| , \quad \text{pero} \quad \|BA\| < \|B\| \, \|A\| ,$$

calculando las cuatro normas de operador involucradas en esas dos fórmulas.

---