PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS II(*TEMA* 3) **1ºA**

HOJA Nº5 (07 – 11 – 2014)

37. Determina de las siguientes aplicaciones las que son lineales. Para estas aplicaciones lineales determina su núcleo y su imagen, calculando una base para cada uno de estos subespacios

$$\begin{array}{lll} f_1 : \underset{(x,y,z)\mapsto(x+y,\,z)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} & f_2 : \underset{(x_1,x_2)\mapsto(4x_1-2x_2,\,3|x_2|)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} & f_3 : \underset{(x_1,x_2)\mapsto(x_1,\,x_2+2)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} \\ f_4 : \underset{(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1^2,\,x_2+x_3)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} & f_5 : \underset{(x_1,x_2)\mapsto x_1-x_2}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} & f_6 : \underset{(x,y,z)\mapsto(2x+y,\,-z,\,0)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3} \end{array}$$

38. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(x,y,z,t) = (x+y-z, x+2y+z+t, -x-3y-3z-2t)$. Encuentra una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ y $\ker(f)$

39. Se pide lo mismo que en el problema anterior para la aplicación

$$g : \underset{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(x_1-x_2+x_3,\,x_4,\,-x_1+x_2-x_3+x_4)}{\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3}$$

40. Encuentra una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuya imagen esté generada por $(1,2,0,-4)$ y $(2,0,-1,-3)$

41. Explica por qué una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,-1) = (3,-1)$ y $f(-2,2) = (-6,2)$ no puede determinarse de forma única. Halla, al menos, dos de esas aplicaciones lineales.

42. Halla una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen esté generada por $(1,2,3)$ y $(4,5,6)$

43. Halla una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo esté generado por $(1,2,3,4)$ y $(0,1,1,1)$

44. Se define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0,0,0) = (1,2,3) \qquad f(1,1,0,0) = (0.1.1)$$
$$f(1,1,1,0) = (2,0,1) \qquad f(1,1,1,1) = (2,1,-1)$$

escribe las ecuaciones de f y determina los subespacios: $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

45. Sea $B = \{\underline{u_1} = (1,-1,0,0),\ \underline{u_2} = (1,1,0,0),\ \underline{u_3} = (0,0,1,1),\ \underline{u_4} = (0,0,1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Demuestra que existe un único endomorfismo f en $\mathbb{R}^4$ que verifica:

$$Ker(f) = L(\{\underline{u_1} + \underline{u_2},\ \underline{u_3} + \underline{u_4} - \underline{u_1}\}),\ f(\underline{u_1}) = 2\underline{u_1} \text{ y } f(\underline{u_3}) = 2\underline{u_3}$$

46. Con el endomorfismo f determinado en el problema anterior, determina una base de $\mathrm{Im}(f)$ y prueba que $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son subespacios suplementarios de $\mathbb{R}^4$.

47. Sea **V** un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $B = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$ una base de **V**. Sean los vectores de **V**: $\underline{u_1} = (2,-1,0)$, $\underline{u_2} = (1,0,1)$, $\underline{u_3} = (1,-1,-1)$ respecto de B, y $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\underline{v_1}) = 3\underline{u_1} - \underline{u_2},\ f(\underline{v_2}) = \underline{u_1} + \underline{u_3},\ f(\underline{v_3}) = \underline{u_2} - 2\underline{u_3}$$

Se pide:

i) Estudia si $\{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}\}$ es una base de **V**.

ii) Escribe las ecuaciones de f respecto de B.

iii) Demuestra que $B' = \{\underline{w_1}, \underline{w_2}, \underline{w_3}\}$ es una base de **V** sabiendo que $\underline{w_1} = 2\underline{v_1} - 4\underline{v_2}$, $\underline{w_2} = \underline{v_1} + \underline{v_3}$, $\underline{w_3} = \underline{v_1} - 2\underline{v_3}$ y escribe las ecuaciones de cambio de B' a B. Escribe, también, la matriz de paso P de B' a B.

48. Determina M_f siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ aplicación lineal tal que $f(\underline{u_1}) = \underline{v_1} + \underline{v_2} + 2\underline{v_3} - \underline{v_4}$, $f(\underline{u_3}) = \underline{v_1} - \underline{v_2} + 3\underline{v_3}$ donde $B_1 = \{\underline{u_1}, \underline{u_2}, \underline{u_3}\}$ y $B_2 = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_4}\}$ son las bases y se sabe además que el vector $\underline{u_2}$ pertenece al núcleo. Halla una base de $\mathrm{Im}(f)$.

PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS II (*TEMA* 3) **1º A**

HOJA Nº 6 (07 – 11 – 2014)

49. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que $\ker(f) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 = 0,$ $x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$, $f(1,0,0,0) = (1,0,1,1)$ y $f(0,1,0,0) = (1,-2,1,-1)$, calcula $f(0,0,1,0)$ y $f(0,0,0,1)$. Determina M_f e $\mathrm{Im}(f)$.

50. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_3 - x_2,\ x_1 - x_2 + 2x_3,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

Si $B = \{\underline{u_1},\underline{u_2},\underline{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ siendo $\underline{u_1} = (1,1,1)$, $\underline{u_2} = (0,1,1)$ y $\underline{u_3} = (0,0,1)$, determina M_f y $M_f(B)$.

51. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ x_1 + 4x_2)$$

y $B = \{\underline{v_1} = \underline{e_2}, \underline{v_2} = \underline{e_1}\}$ y $B' = \{\underline{v_1'} = \underline{e_3}, \underline{v_2}' = \underline{e_2}, \underline{v_3}' = \underline{e_1}\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (recordamos que $\underline{e_i}$ representa los vectores de la base canónica correspondiente).

a) Determina $M_f(B,B')$

b) Halla $f(-4,6)$

52. Siendo $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1,x_2) = (x_2,x_1,x_1 - x_2)$$

Si $B = \{\underline{u_1},\underline{u_2}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ siendo $\underline{u_1} = (2,-1)$, $\underline{u_2} = (1,3)$ y $B' = \{\underline{v_1},\underline{v_2},\underline{v_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ siendo $\underline{v_1} = (2,0,1)$, $\underline{v_2} = (-1,1,-1)$ y $\underline{v_3} = (0,2,0)$. Calcula: M_f y $M_f(B,B')$

53. Sea $f \in L(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_2 + x_3,2x_1)$$

averigua si es un automorfismo y determina $M_{f\circ f}$

54. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 5 y $f:\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo. Sea $B = \{\underline{v_1},\underline{v_2},\underline{v_3},\underline{v_4},\underline{v_5}\}$ una base de V tal que $\underline{v_1},\underline{v_3},\underline{v_4} \in \ker(f)$ y $f^2(\underline{v_5}) = f(f(\underline{v_5})) = \underline{v_1} + 3\underline{v_2} + \underline{v_4}$. Si $f^3 = f$ encuentra $M_{f^2}(B)$. Estudia si f es un automorfismo.

55. Halla $M_{f\circ g}\ (B,B')$ siendo

$$f: \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \to \underset{\mapsto (x-y+z,x+2z)}{\mathbb{R}^2} \qquad g: \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \to \underset{\mapsto (x+y,x-4y,x-y)}{\mathbb{R}^3}$$

$B = \{(1,1),(0,-1)\}$ y $B' = \{(0,1),(-1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$

56. Sea $f:\ V \to V'$ tal que

$$f(\underline{u_1}) = \underline{u_1'} - 3\underline{u_2'},\ f(\underline{u_2}) = 4\underline{u_1'} + \underline{u_2'}$$

siendo $B = \{\underline{u_1},\underline{u_2}\}$ una base de V y $B' = \{\underline{u_1'},\underline{u_2'}\}$ una base de V'. Determina las ecuaciones de f en B y B'.

57. Sea $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_3[x]$ tal que $f(a,b,c,d) = d + cx + bx^2 + (a + 2c + d)x^3$ prueba que f es un isomorfismo y calcula $M_{f^{-1}}$.

58. Sea la aplicación lineal $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_3[x]$ tal que $f(x,y,z) = xt^3 + yt + y + z$.

a) Escribe M_f

b) Halla $Ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

c) ¿Es un isomorfismo?