ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 5

1. Demuestra que el conjunto $(\mathcal{C}([0,1]),+,\cdot)$, donde $\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ con las operaciones
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{y} \quad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para } x \in [0,1]$$
es un anillo y di qué tipo de anillo es.

2. Halla las unidades de los siguientes anillos $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $Z[\sqrt{-5}]$, $M_2(\mathbb{Q})$ y $M_2(\mathbb{Z})$.

En lo que sigue consideramos anillos conmutativos con unidad, y supondremos que $1 \neq 0$.

3. Demuestra que un cuerpo no tiene divisores de cero.

4. Demuestra que en un anillo finito, todo elemento no nulo es una unidad o bien un divisor de cero. Observa, en particular, que un anillo finito es un dominio si y solo si es un cuerpo.

5. Decide, para cada elemento no nulo de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ si es unidad o si es divisor de cero. Demuestra que en general, en el anillo finito $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, las unidades son exactamente los elementos de orden n.

6. Demuestra que si A es un dominio conmutativo, entonces $A[X]$ es un dominio conmutativo.

7. Demuestra que el producto $R_1 \times R_2$ de anillos es un anillo (con las operaciones componente a componente). Indica cuáles son las unidades. Decide si el producto de dos cuerpos es un cuerpo.

8. Calcula el número de unidades del anillo finito $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, e indica cuántos divisores de cero tiene.

9. Se considera el *anillo de los enteros algebraicos*
$$\mathbb{Z}^{int} := \{\alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0 \text{ para algún } p(X) \in \mathbb{Z}[X] \text{ mónico}\}.$$
Demuestra lo siguiente:
   (a) $\mathbb{Z}^{int} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$;
   (b) el elemento 2 de $\mathbb{Z}^{int}$ ni en una unidad ni es irreducible;
   (c) $\mathbb{Z}^{int}$ no tiene elementos irreducibles.

10. Demuestra que $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

11. Demuestra que $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ con la suma y multiplicación de matrices es un cuerpo.

12. Decide si los siguientes conjuntos son subanillos de $\mathbb{R}$:
   (a) $R_1 = \{a + b\sqrt[2]{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$;
   (b) $R_2 = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \,|\, a, b, c \in \mathbb{Z}\}$;
   (c) $R_3 = \{a + b\sqrt[3]{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

13. Demuestra que todo subanillo de un cuerpo es un dominio.

14. Sea R un anillo e I un ideal de R. Demuestra que los siguientes subconjuntos de R son ideales de R.
   (a) $Rad(I) := \{a \in R : a^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ (el radical de I);
   (b) $Ann(I) := \{a \in R : ax = 0 \text{ para todo } x \in I\}$ (el anulador de I).

15. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Demuestra lo siguiente:
   (a) Si I es un ideal de R entonces, $I = R \iff$ existe una unidad de R en I.
   (b) R es un cuerpo $\iff \{0\}$ es el único ideal propio de R.

16. Sea $r \in \mathbb{R}$. Decide si el conjunto $M_r = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \,|\, f(r) = 0\}$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}([0,1])$.

17. Encuentra todos los ideales maximales en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

18. Indica cuántos ideales primos tiene el anillo $\mathbb{R}[X]/I$ si $I = \langle (X^2-1)^5 \rangle$.

19. Demuestra que $\{(3a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $\{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal primo pero no maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

20. Sean los anillos $A_1 = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $A_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Consideramos los anillos cociente $R_i = A_i/2A_i$ con $i = 1, 2$. Para $i = 1, 2$, halla:

    (a) el número de elementos de R_i;
    (b) todos los ideales de R_i.

21. Halla el cuerpo de fracciones de los siguientes dominios: $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ y $\mathbb{Z}[i]$.

22. Factoriza los siguientes polinomios en su correspondiente anillo:

    (a) $X^5 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$;
    (b) $X^4 - 1$ en $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{F}_2[X]$ y $\mathbb{F}_3[X]$;
    (c) $X^4 + X^3 - X^2 \in \mathbb{F}_2[X]$.

23. Sea p un número primo.

    i) Demuestra que $x^{p-1} - 1$ factoriza como producto de $p - 1$ polinomios mónicos de grado uno en $\mathbb{F}_p[X]$.

    ii) Demuestra que el grupo de unidades de $\mathbb{F}_p$ es un grupo abeliano cíclico.

24. Se define la característica de un anillo R, $\operatorname{ch}(R)$, como el mínimo $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $1 + \overset{n}{\cdots} + 1 = 0$, si tal n existe; en caso de que no exista tal n, $\operatorname{ch}(R) = 0$. Demuestra que si R es un dominio, entonces $\operatorname{ch}(R) = 0$ o $\operatorname{ch}(R) = p$ con p primo.

25. Sea R un dominio. Halla el núcleo del homomorfismo de evaluación $ev_0 \colon R[X] \to R \colon f(X) \mapsto f(0)$.

26. Demuestra que existen los siguientes isomorfismos dando el isomorfismo explicitamente:

    (a) $\mathbb{Q}[X, Y]/(X, Y) \cong \mathbb{Q}$;
    (b) $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}$, donde $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \,|\, p(2) = 0\}$;
    (c) $\mathbb{Q}[x]/I \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, donde $I = (X^2 - 2)$.

27. Sea F un cuerpo y $a \in F$. Demuestra que el núcleo del homomorfismo de evaluación $ev_a \colon F[X] \to F$ es un ideal maximal de $F[X]$.

28. Halla el *mcd* mónico de $X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ y $X^3 + X^2 - X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$ y exprésalo como una combinación lineal de los dos polinomios.

29. Sea R un DIP. ¿Es $R[X]$ un DIP?

30. Enuncia y demuestra un criterio de irreducibilidad como el de Eisentein para un DFU R, su cuerpo de fracciones F y un elemento irreducible p de R.

31. Sea R un DE con función euclídea d. Sean $a, b \in R$. Demuestra que si a y b son asociados entonces $d(a) = d(b)$.

32. Demuestra que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ con $d(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$ es un dominio euclídeo.

33. Sea p un número primo. Se considera el conjunto

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \,:\, p \text{ no divide a } s \right\}.$$

    Demuestra lo siguiente:

    (a) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un subanillo de $\mathbb{Q}$ (*el localizado de* $\mathbb{Z}$ *en* (p)) y halla $U(\mathbb{Z}_{(p)})$;
    (b) un ideal no nulo de $\mathbb{Z}_{(p)}$ está generado por p^k con $k \geq 0$ y concluye que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un DIP;
    (c) $(p) := p\mathbb{Z}_{(p)}$ es el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$.
    (d) ¿A qué cuerpo es isomorfo el anillo cociente $\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}$?
    (e) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un DE.