ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 3

1. Demuestra que S_3 es isomorfo a un subgrupo de S_4.

2. Halla dos ciclos que no conmuten. Halla una potencia de un ciclo que no sea un ciclo.

3. Escribe las siguientes permutaciones como un producto de ciclos disjuntos.
   (a) (12)(23)(34)
   (b) (246)(147)(135)
   (c) (12)(53214)(23)
   (d) (1234)(2345)

4. Escribe las siguientes permutaciones como un producto de trasposiciones.
   (a) (14)(27)(523)(34)(1472)
   (b) (7236)(85)(571)(1537)(486)

5. Halla las órbitas de cada uno de los 8 elementos de I_8 en σ, para cada permutación σ del ejercicio anterior. Sea $\sigma = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$. Encuentra σ^i para cada $i = 1, 2, \ldots, 6$.

6. Para cada permutación τ del ejercicio 4), demuestra que el orden de τ es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disjuntos cuyo producto es τ. Encuentra el orden de σ^{1000}, para cada permutación σ del ejercicio 4).

7. Calcula el orden de cada una de las permutaciones siguientes:
   $\alpha = (456)(567)(671)(123)(234)(345)$
   $\beta = (45)(431)$
   $\gamma = (345)(234)(123)(671)(567)(456)$

8. Demuestra que el subgrupo G de S_4 generado por los elementos $\sigma = (1432)$ y $\tau = (24)$ es isomorfo a D_4.

9. Si σ es un k-ciclo con k impar, demuestra que existe un ciclo τ tal que $\tau^2 = \sigma$.

10. Sea σ un k-ciclo de S_n. Demuestra que σ^2 es un ciclo si y solo si k es impar.

11. Sea σ un producto de ciclos disjuntos de igual longitud. Demuestra que σ es una potencia de un ciclo.

12. Indica cuáles de estas permutaciones son pares:
    (a) (2468)
    (b) (246)(134)
    (c) (12)(123)(1234)

13. Calcula el orden y el signo de la permutación $\sigma = (5739)(42)(385)(164)$ de S_9. Calcula σ^{26} y σ^{-1}.

14. Encuentra la descomposición en ciclos disjuntos de todas las potencias del ciclo (123456).

15. Dadas las permutaciones $\alpha = (12)(34)$ y $\beta = (56)(13)$, encuentra una permutación γ tal que $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$.

16. Demuestra que no existe ninguna permutación α tal que $\alpha^{-1}(123)\alpha = (13)(578)$.

17. Calcula el conjugado de β_i mediante α_i para:
    $\alpha_1 = (12)$ $\quad \beta_1 = (12)(23)$
    $\alpha_2 = (123)$ $\quad \beta_2 = (345)$
    $\alpha_3 = (14)(23)$ $\quad \beta_3 = (321)(45)$
    $\alpha_4 = (13)(247)$ $\quad \beta_4 = (256)(143)$

18. Sea p un número primo. Demuestra que los únicos elementos de orden p en S_n son los productos de p-ciclos disjuntos.

19. Comprueba que A_5 está generado por los 3-ciclos.

20. Demuestra que D_n es isomorfo a un subgrupo de S_n, para cada $n \geq 3$.

21. ¿Cuántos homomorfismos hay de D_3 en A_4?

22. Definimos el tipo de descomposición cíclica de σ en S_n como una sequencia $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_s \geq 1$ cuando σ se puede expresar como composición de s ciclos distintos de longitud λ_i (incluyendo "ciclos de longitud uno"). Por ejemplo la identidad tiene tipo de descomposición $1 \geq 1 \geq 1 \geq \cdots \geq 1$ (n-veces).

    (a) Observa que hay tanto tipos de descomposición como secuencias $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_s \geq 1$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_s = n$.

    (b) Demuestra que dos elementos σ_1, σ_2 tienen el mismo tipo de descomposición si y solamente si son conjugados ($\exists \omega \in S_n, \omega\sigma_1\omega^{-1} = \sigma_2$).

    (c) Indica cuántos tipos de descomposición hay en S_4, y cuántos en S_5.

    (d) Demuestra que S_4 es la unión disjunta: $S_4 = cl((1234) \uplus cl((123) \uplus cl((12)(34)) \uplus cl((12)) \uplus cl(Id)$. En particular
    $$4! = |cl((1234))| + |cl((123))| + |cl((12)(34))| + |cl((12))| + |cl(id))|.$$

    (e) Halla $|cl(\sigma)|$ y calcula el subgrupo $C_{S_4}(\sigma)$ para las distintas clases de equivalencia que figuran en el apartado anterior.

    (f) Demuestra que el subgrupo $C_{S_4}((12)(34))$ es isomorfo a D_4.

    (g) Demuestra que en S_5: $|cl((13)(24))| = 15$ y su subgrupo centralizador $C_{S_5}((13)(24))$ es isomorfo a D_4.

23. Demuestra que $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23), 1\}$ es normal en S_4.

24. Demuestra que para todo $\sigma \in S_n$, $C_{S_n}(\sigma)$ es un subgrupo $N_{S_n}(< \sigma >)$ (el normalizador del subgrupo $< \sigma >$) (Lo mismo vale en cualquier grupo G).

25. Fijada la permutación (12345) en S_5, demuestra que:

    (a) $|cl((12345))| = 4!$.

    (b) $C_{S_5}((12345)) = \langle(12345)\rangle$.

    (c) Observa que el grupo $\langle(12345)\rangle$ contiene 4 elementos de orden 5. Indica, a partir de (a), cuántos conjugados tiene el grupo $\langle(12345)\rangle$ y concluye que la inclusión $C_{S_5}((12345)) < N_{S_5}(\langle(12345)\rangle)$ es estricta.