

y como \vec{m} es constante y $\text{rot } \vec{E} = 0$

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{m}$$

La dependencia de \vec{F} con θ queda implícita en el carácter vectorial de \vec{m} .

Si el dipolo puede girar con un eje de giro perpendicular a \vec{m} y \vec{E} , entonces el ángulo θ que aparece en la expresión de la energía es el parámetro que caracteriza el giro. El par será:

$$M = \left| -\frac{\partial W}{\partial \theta} \right| = \left| -m E \sin \theta \right| = |\vec{m} \times \vec{E}|$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{E}$$

Esta expresión sigue siendo válida aunque el eje de giro no sea perpendicular al campo \vec{E} ya que la componente de \vec{E} paralela al eje de giro no afecta al valor del par.

*

4 CALCULO DEL POTENCIAL METODOS DE IMAGENES ELECTRICAS SUPERPOSICION Y TRANSFORMACION CONFORME

4.1.- Imágenes eléctricas.

Este método de cálculo del potencial se basa en la posibilidad de sustituir alguno o algunos de los elementos de un sistema dado por cargas puntuales, haciendo que el sistema equivalente obtenido sea más sencillo.

Las cargas ficticias introducidas se llaman *cargas imagen* de las reales.

a) *Carga puntual frente a un plano conductor indefinido conectado a potencial cero.*

Si la carga q se encuentra a una distancia d del plano, la carga imagen es $q' = -q$, situada a la misma distancia d al otro lado del plano.

El potencial en cualquier punto es

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} \right) \quad [4.1]$$

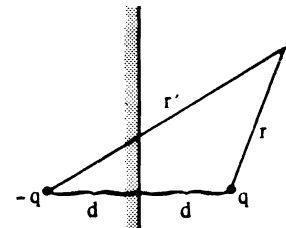


Fig. 4.1

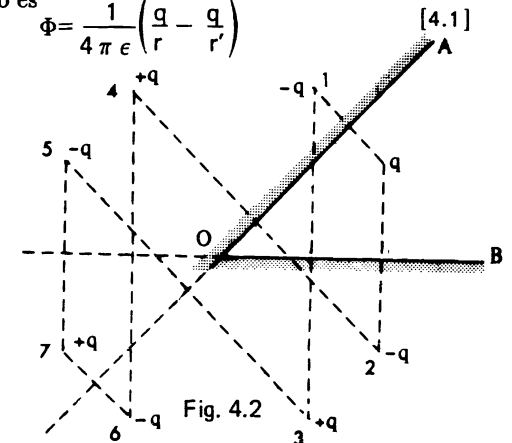


Fig. 4.2

Se comprueba que para los puntos del plano, $r = r'$, $\Phi = 0$, es decir, la solución [4.1] cumple la condición de contorno. Como la solución de Φ es única, ha de ser

precisamente ésta.

B. Carga puntual entre dos planos conductores que se cortan formando un diedro α .

Aunque q en P y $-q$ en P_1 por sí solas dan potencial constante y nulo en OA , y aunque q en P y $-q$ en P_2 estando solas pondrían OB a potencial constante y nulo, al estar las tres juntas no darán potencial nulo ni en OA ni en OB . Por esta razón hay que seguir hallando imágenes de imágenes hasta que imágenes posteriores coincidan o estén suficientemente lejos como para no influir apreciablemente en el potencial de la región de interés. Las imágenes llegarán a coincidir, y por tanto se resolverá el problema con exactitud con un número finito de imágenes, sólo cuando el ángulo \widehat{BOA} sea un submúltiplo de 180° . Este es el caso de la fig. 4.2, en la que $\widehat{BOA} = 45^\circ$.

El conjunto de imágenes para $\widehat{BOA} = 90^\circ$ es el representado en la fig. 4.3.

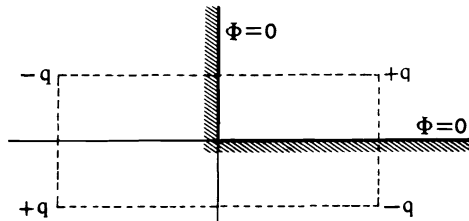


Fig. 4.3

C. Carga puntual q frente a una esfera conductora.

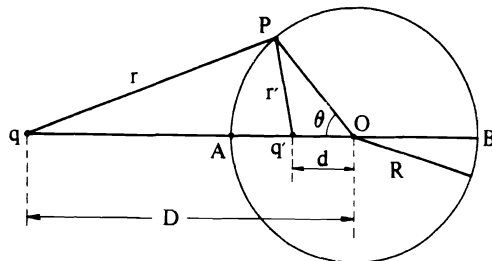


Fig. 4.4

La carga imagen de q es la q' de la fig. 4.4.

$$q' = -q \frac{R}{D}$$

$$d = \frac{R^2}{D}$$

Puede demostrarse que el par de cargas q y q' ponen la esfera a potencial cero.

D. Línea cargada con λ , paralela a un cilindro conductor.

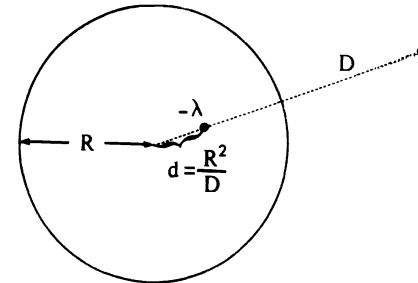


Fig. 4.5

La línea imagen tiene una densidad de carga $-\lambda$ y se encuentra a una distancia $d = R^2/D$ del eje del cilindro. El conjunto de las dos líneas hace equipotencial la superficie del cilindro.

4.2.- Superposición.

En determinados problemas puede resultar difícil la búsqueda de una función potencial que cumpla unas condiciones de contorno especificadas, sobre

todo si estas condiciones de contorno son complicadas. Basándose en el carácter lineal de las ecuaciones de Poisson y Laplace,

$$\Delta(\Phi_1 + \Phi_2) = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 \quad \text{y} \quad \Delta(k\Phi_1) = k\Delta\Phi_1$$

puede darse la solución Φ del problema como superposición de soluciones de problemas más sencillos, $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, cada una de las cuales satisface la condición de contorno en una superficie y es nula en todas las demás. A estas soluciones parciales hay que sumar una posible solución Φ_p que dé potencial nulo en todas las superficies y que al mismo tiempo satisfaga la ecuación de Poisson.-

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n + \Phi_p \quad [4.2]$$

4.3.- Funciones de variable compleja.

La variable $Z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta}$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x}$$

se llama *variable compleja*. Evidentemente, cada valor de Z puede representar un punto del plano xy , o plano Z .

Sea ahora $W = u + jv$ otra variable compleja en la que las partes real e imaginaria son funciones de x e y .

$$W = u(x,y) + j v(x,y)$$

Esta relación funcional se puede poner:

$$W = f(Z)$$

Cada valor de W representa un punto del plano uv .

W es diferenciable en el punto Z_0 si existe

$$\lim_{Z \rightarrow Z_0} \frac{W(Z) - W(Z_0)}{Z - Z_0}$$

ya si este límite es independiente de la forma en que Z tiende a Z_0 . Si una función es diferenciable en todos los puntos de un dominio, se dice que es *analítica* u *holomorfa* en él. Las condiciones de diferenciabilidad son las de *Cauchy - Riemann*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad [4.3]$$

Fácilmente se deduce de [4.3] que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas.

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \Delta v(x,y) = 0 \quad [4.4]$$

Atribuimos a u el significado de potencial eléctrico y estudiamos el sentido físico de v ,

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{u}_y\right) \quad [4.5]$$

$$\vec{D} = -\epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{u}_y\right) \quad [4.6]$$

Calculemos el flujo eléctrico a través de una superficie cuya altura en el eje z sea la unidad y cuya traza en el plano xy sea la curva $\widehat{12}$. Definimos el sentido de \vec{n} tal como se indica en la figura

$$\vec{n} = \frac{\vec{d\ell} \times \vec{k}}{d\ell}$$

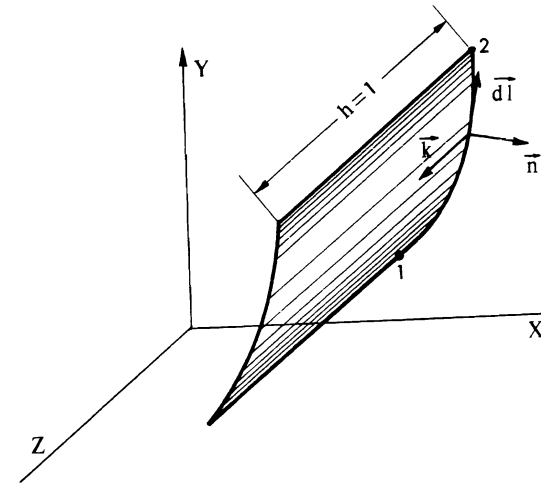


Fig. 4.6

Como $ds = d\ell \cdot 1 = d\ell$, el flujo será:

$$\begin{aligned} \psi_D &= \int_s \vec{D} \cdot \vec{n} ds = \int_1^2 \vec{D} \cdot \vec{n} d\ell = \int_1^2 \vec{D} \cdot (d\ell \times \vec{k}) = \int_1^2 (D_x dy - D_y dx) = \\ &= \int_1^2 \left(-\epsilon \frac{\partial v}{\partial y} dy - \epsilon \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) = -\epsilon (v_2 - v_1) \quad [4.7] \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de [4.3].

Si hubiéramos tomado v como potencial,

$$\psi_D = \epsilon (u_2 - u_1) \quad [4.8]$$

4.4.- Transformación conforme.

Como la relación funcional

$$W = W(Z)$$

da un valor de W para cada valor de Z , cada punto del plano Z se transforma en un punto del plano W y, en general, una línea se transforma en una línea y un

recinto en un recinto.

Cuando la función $W(Z)$ es analítica, la derivada, que es única, se puede poner en forma módulo-argumental

$$\frac{dW}{dZ} = M e^{j\alpha} \quad [4.9]$$

$$dW = M e^{j\alpha} dZ \quad [4.10]$$

En [4.10] se observa que la región infinitesimal que rodea el punto Z se transforma en una región infinitesimal que rodea al punto W , ampliada mediante un factor de escala M y girada un ángulo α . Si dos curvas se cortan en el plano Z en un punto determinado con un cierto ángulo, sus transformadas en el plano W se cortan con el mismo ángulo, puesto que las direcciones de ambas rectas en el punto de corte han sido giradas un mismo ángulo α al realizar la transformación. Una transformación con estas propiedades se llama *transformación conforme*.

En particular, las líneas $u = \text{constante}$ y $v = \text{constante}$ del plano W se cortan en ángulo recto, luego sus transformadas en el plano Z también serán ortogonales.

Si en el plano Z el potencial electrostático es armónico

$$\Delta \Phi(x,y) = 0,$$

se demuestra que también lo es en el plano W

$$\Delta \Phi(u,v) = 0$$

El método de transformación conforme, que sólo es aplicable en problemas bidimensionales, es útil cuando los contornos del plano Z se transforman en

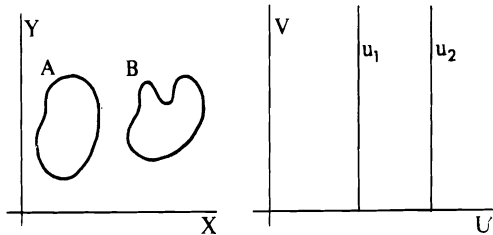


Fig. 4.7

contornos más sencillos en el plano W . Lo deseable, desde luego, sería poder pasar los contornos del plano Z a rectas paralelas a alguno de los ejes del plano W . Por ejemplo, si los contornos A y B pueden pasarse, mediante una cierta transformación, a rectas paralelas al eje v , u_1 y u_2 , el potencial en W es sencillamente

$$\Phi(u,v) = u$$

y en Z :

$$\Phi(x,y) = u(x,y)$$

4.5.- Transformación potencial.

La función $W(Z) = Z^p$ es analítica.

$$W(Z) = u + jv = r^p ; e^{j p \alpha} = r^p \cos p\alpha + j r^p \sin p\alpha$$

$$\begin{cases} u = r^p \cos p\alpha \\ v = r^p \sin p\alpha \end{cases}$$

Los contornos que se simplifican son los que hacen $v = \text{constante}$, es decir, aquellos que en el plano Z tienen la ecuación:

$$r^p \sin p\alpha = \text{constante.}$$

En particular, las direcciones $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{p}$ se transforman en $v = 0$. Las líneas equipotenciales en el plano W serán las paralelas al eje u :

$$v = \text{constante}, \quad \Phi = v = r^p \sin p\alpha$$

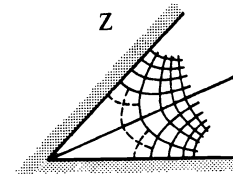


Fig. 4.8

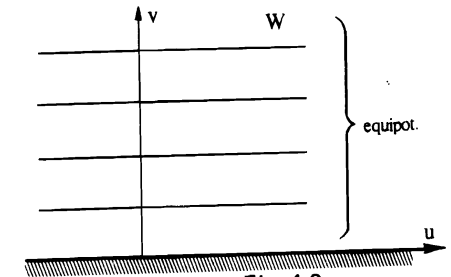


Fig. 4.9

Dado en el plano Z un diedro α , la transformación que simplifica el problema es $W(Z) = Z^p$, con $p = \pi/\alpha$.

4.6. Transformación logarítmica.

Considérese la función: $W(Z) = C_1 \ln Z + C_2$

donde C_1 y C_2 pueden ser reales o complejas. Si las consideramos reales:

$$W(Z) = C_1 \ln r + j C_1 \theta + C_2$$

$$u = C_1 \ln r + C_2, \quad v = C_1 \theta$$

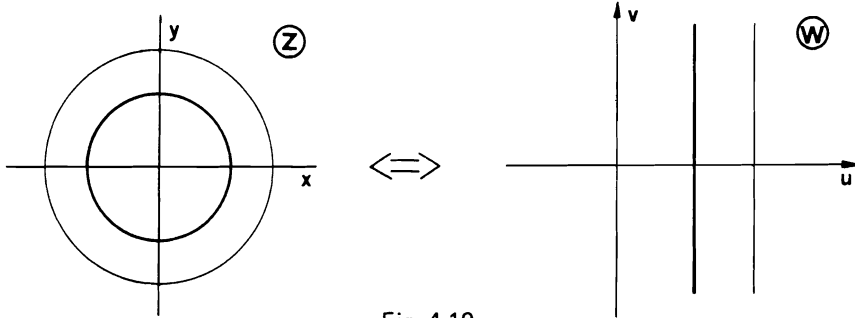


Fig. 4.10

a) Si tomamos u como función potencial, para que u sea constante ha de serlo r . Las circunferencias concéntricas, centradas en el origen, del plano (r, θ) se transforman en rectas paralelas al eje v en el plano (u, v) , (Fig. 4.10).

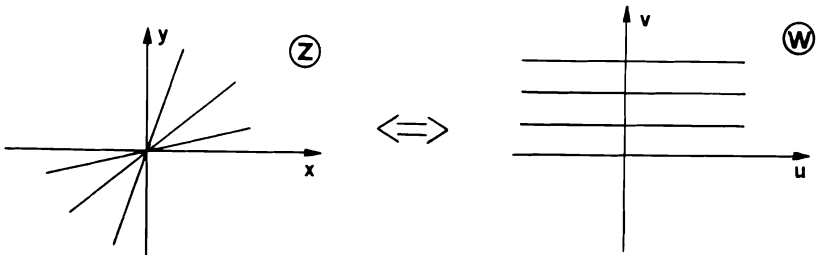


Fig. 4.11

En particular, si deseamos que la circunferencia $r = R$ se transforme en la recta $u = 0$, hemos de hacer:

$$C_1 \ln R + C_2 = 0, \quad C_2 = -C_1 \ln R$$

b) Si tomamos v como función potencial, para que v sea constante ha de serlo θ . Las rectas del plano Z que pasan por el origen se transforman en rectas del plano W paralelas al eje u , (Fig. 4.11).

Consideremos ahora la siguiente transformación logarítmica $W(Z) = C_1 \ln \frac{Z-a}{Z+a}$

Suponiendo que C_1 y a son reales:

$$W(Z) = C_1 \ln \left| \frac{Z-a}{Z+a} \right| + j C_1 \arg \frac{Z-a}{Z+a}$$

Tomando como función potencial $\Phi = u$

$$\Phi(x, y) = u(x, y) = C_1 \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} = C_1 \ln \sqrt{K}$$

en donde se deduce que los contornos de Z que se transforman en rectas paralelas al eje v son:

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = K, \quad x^2 + y^2 - 2ax \frac{1+K}{1-K} + a^2 = 0$$

circunferencias de centro en $\left(a \frac{1+K}{1-K}, 0 \right)$ y radio $R = \frac{2a\sqrt{K}}{1-K}$

4.7.- Inversión.

La transformación dada por

$$W(Z) = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$$

constituye una inversión seguida de una simetría. Transforma círculos de Z en círculos de W .

$$W = u + jv = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Y análogamente:

$$x = \frac{x}{u^2 + v^2} \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

resultando que la transformación es simétrica.

Transformando la ecuación general de la circunferencia en Z a W :

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$$

se encuentran los siguientes casos particulares interesantes:

- 1.º) $d = 0$. Las circunferencias de Z que pasan por el origen se transforman en rectas de W que no pasan por el origen.
- 2.º) $a = 0$. Las rectas de Z que no pasan por el origen se transforman en circunferencias de W que pasan por el origen.
- 3.º) $a = 0$ y $d = 0$. Las rectas de Z que pasan por el origen se transforman en rectas de W que también pasan por el origen.
- 4.º) Rectas paralelas a los ejes en Z :

$x = \text{constante}$.

Es el caso de $a = 0$ y $c = 0$. La ecuación de la circunferencia queda reducida a $bx + d = 0$.

La ecuación transformada en W es $u^2 + v^2 + \frac{b}{d}u = 0$, que representa circunferencias tangentes al eje v centradas en el eje u .

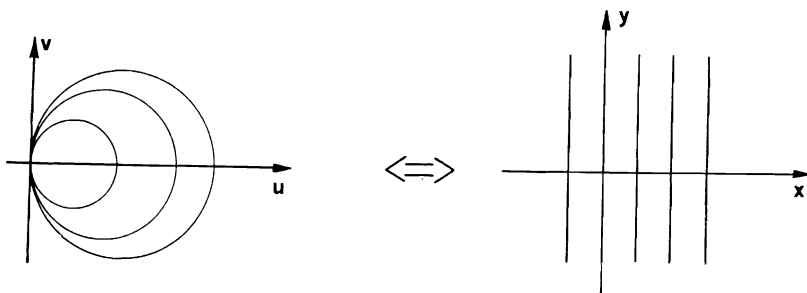


Fig. 4-12

$y = \text{constante}$, $a = 0$ y $b = 0$.

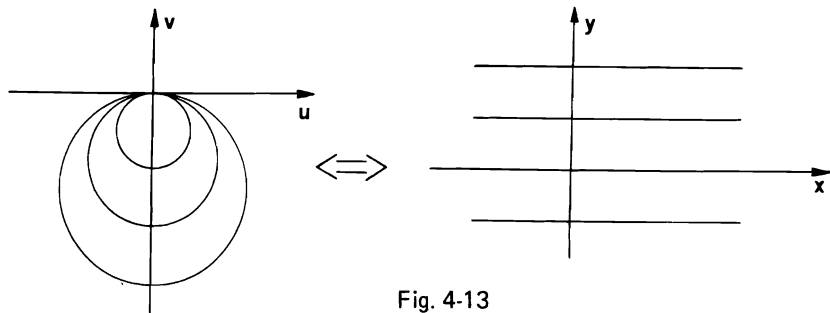


Fig. 4-13

Ecuación en Z : $cy + d = 0$.

Ecuación en W : $u^2 + v^2 - \frac{c}{d}v = 0$. Son circunferencias tangentes al eje u centradas en el eje v .

5.º) Rectas paralelas a los ejes en W :

$u = \text{constante}$, $d = 0$ y $c = 0$.

Ecuación en W : $bu + a = 0$.

Ecuación en Z : $x^2 + y^2 + \frac{b}{a}x = 0$. Son circunferencias tangentes al eje y centradas en el eje x .

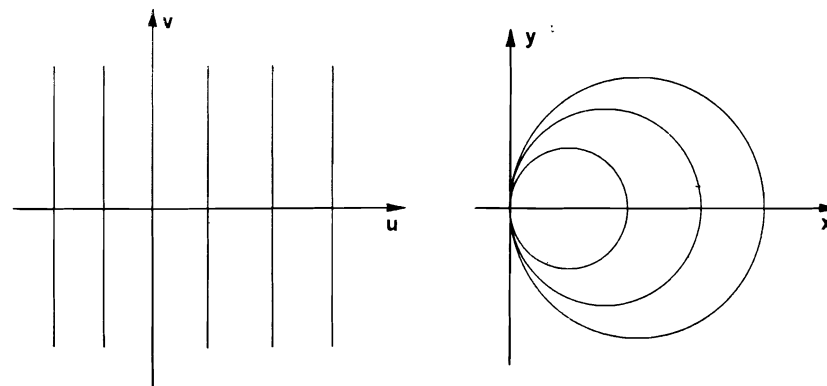


Fig. 4.14

$v = \text{constante}$, $d = 0$ y $b = 0$.

Ecuación en W : $-cv + a = 0$.

Ecuación en Z : $x^2 + y^2 + \frac{c}{a}y = 0$. Son circunferencias tangentes al eje x centradas en el eje y .

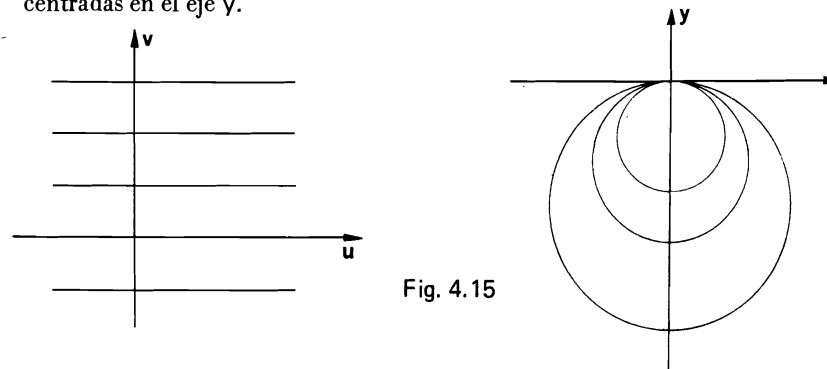


Fig. 4.15

4.8. Transformación bilineal o de Möebius.

Es la dada por la función:

$$W(Z) = \frac{aZ + b}{cZ + d} \quad [4.11]$$

que, como puede observarse, es una generalización de la anterior. Para que esta transformación tenga sentido se requiere que:

$$\Delta = ad - bc \neq 0$$

A este número, Δ , se le llama *módulo de la transformación*.

La función [4.11] se puede poner en la forma:

$$W(Z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cZ + d} \quad [4.12]$$

Esta transformación es el producto de cinco transformaciones elementales:

- 1.^a cZ es una semejanza si c es real y una semejanza seguida de un giro si c es compleja. En cualquier caso, no cambia la *forma* de la figura transformada: las circunferencias pasan a circunferencias.
- 2.^a $cZ + d$ es una traslación.
- 3.^a $\frac{1}{cZ + d}$ es la estudiada en el apartado anterior. Como se ha dicho, consiste en una inversión seguida de una simetría.
- 4.^a $\frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cZ + d}$, análoga a la primera.
- 5.^a $\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cZ + d}$ es una traslación.

Como ninguna de estas transformaciones parciales cambia la forma de la figura transformada, las circunferencias de Z pasan a circunferencias de W . En algunos casos límite la transformación bilineal puede dar (o proceder de) rectas.

4.9. Transformación exponencial.

$$W(Z) = e^Z, \quad Z = \ln W$$

$$u + jv = e^x (\cos y + j \operatorname{sen} y)$$

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

Si $y = \text{constante}$:

$$\begin{cases} u = e^x \cos k \\ v = e^x \operatorname{sen} k \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \\ v = u \operatorname{tg} k, \end{array} \right.$$

son rectas que pasan por el origen.

Si $x = \text{constante}$.

$$\begin{cases} u = e^{k'} \cos y \\ v = e^{k'} \operatorname{sen} y \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \\ u^2 + v^2 = e^{2k'} \end{array} \right.$$

son circunferencias centradas en el origen.

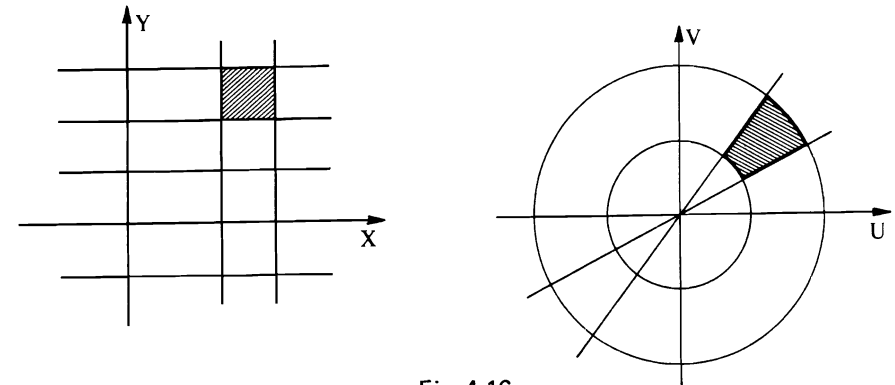


Fig. 4.16

4.10. Transformación trigonométrica.

Se realiza mediante la función:

$$W = \operatorname{arccos} Z, \quad Z = \cos W \quad [4.13]$$

$$x + jy = \cos(u + jv) = \cos u \operatorname{ch} v - j \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \quad [4.14]$$

$$\begin{cases} x = \cos u \operatorname{ch} v \\ y = \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases} \quad [4.15]$$

$$\begin{cases} x = \cos u \operatorname{ch} v \\ y = \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases} \quad [4.16]$$

Tomemos v como función potencial. Las rectas $v = \text{constante}$ de W son transformadas de

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1 \quad [4.17]$$

Esta es una familia de elipses homofocales en las que:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \text{ch}^2 v - \text{sh}^2 v = 1$$

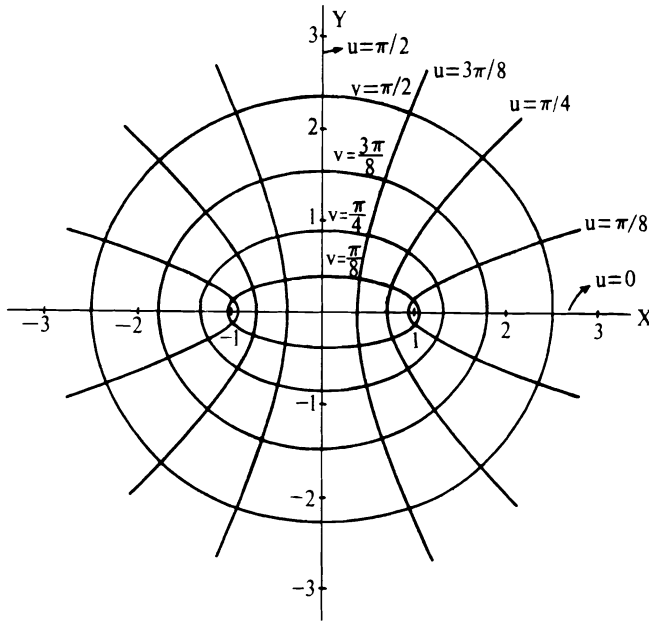


Fig. 4.17

Estas elipses degeneran en el segmento comprendido entre 1 y -1 en el eje x cuando $v = 0$, ya que entonces $x = \cos u$, $y = 0$, y por la naturaleza de la función coseno:

$$-1 \leq \cos u \leq 1$$

Si tomamos u como potencial, las rectas $u = \text{constante}$ corresponden a:

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\text{sen}^2 u} = 1, \quad [4.18]$$

que son hipérbolas homofocales, con $c^2 = 1$, ortogonales a las elipses de [4.17].

Si $u = 0$, las hipérbolas degeneran en la semirrecta $x > 1$:

$$\begin{cases} x = \text{ch } v \\ y = 0 \end{cases}$$

Si $u = \pi$, las hipérbolas degeneran en la semirrecta $x < -1$:

$$\begin{cases} x = -\text{ch } v \\ y = 0 \end{cases}$$

En el eje y es la hipérbola [4.18] con $u = \frac{\pi}{2}$

4.11. Transformación de Schwarz.

Sirve para transformar polígonos del plano W (ó Z) en el eje x del plano Z (ó el eje u del W).

Un polígono del plano W, cuyos vértices estén en los puntos W_1, W_2, \dots, W_n se transforma en el eje x del plano Z mediante la transformación dada por:

$$\frac{dW}{dZ} = A (Z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (Z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (Z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \quad [4.19]$$

$$W = A \int (Z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} (Z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (Z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} dz + B \quad [4.20]$$

Al mismo tiempo, la zona interior al polígono queda transformada en el semiplano $y > 0$. Debe tenerse en cuenta al aplicar esta transformación a los problemas que:

- 1º) Tres cualesquiera de los puntos x_1, x_2, \dots, x_n se pueden escoger a voluntad.
- 2º) Las constantes A y B determinan el tamaño, la orientación y la posición del polígono.
- 3º) Es conveniente escoger un punto, por ejemplo x_n , en el infinito, para que desaparezca el último factor de [4.19] y [4.20].

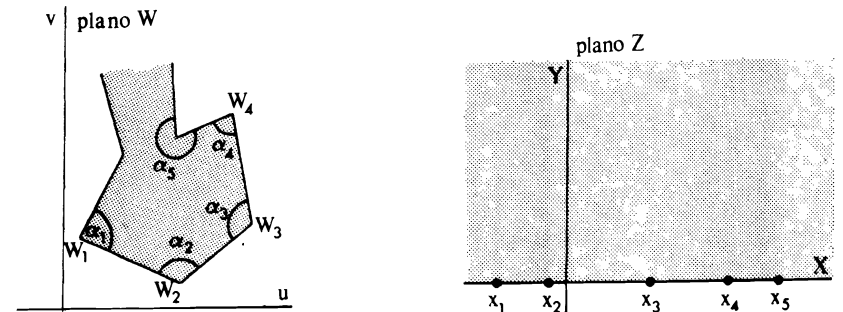


Fig. 4.18

4º) Cualquier polígono abierto puede considerarse como caso límite de un polígono cerrado.

4.12.- Fórmulas de Dirichlet para el círculo y el semiplano.

Sea $F(\varphi)$ la función conocida que da el potencial en los puntos de una circunferencia de radio R , en cuyo interior no existen cargas, es decir, en cuyo interior el potencial satisface la ecuación de Laplace; se puede demostrar que el potencial en todo punto interior (r, θ) viene dado por la expresión:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) F(\varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad [4.21]$$

Considérese ahora el caso en que el potencial $\Phi(x,y)$ sea armónico en el semiplano $y > 0$ y supongamos que conocemos la función que da el valor del potencial en los puntos del eje x :

$$G(x) = \Phi(x, 0).$$

Entonces el potencial en todo el punto del semiplano $y > 0$ viene dado por:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y G(\eta) d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} \quad [4.22]$$

PROBLEMAS

IMAGENES ELECTRICAS

4-1. Un plano infinito separa dos semiespacios dieléctricos de permividades ϵ y ϵ_0 . Se coloca una carga q en el vacío a una distancia a del plano. Hallar la distribución de potencial en todo el espacio, la densidad superficial de carga aparente debida a la polarización en el plano y la fuerza a que se halla sometida la carga.

Solución

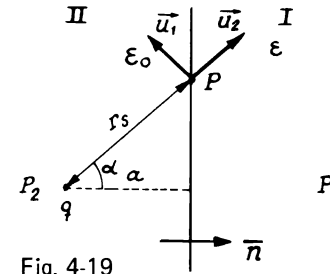


Fig. 4-19

Buscaremos un sistema equivalente sustituyendo los dieléctricos por cargas y calcularemos el valor de estas cargas haciendo que el nuevo sistema cumpla las condiciones de contorno.

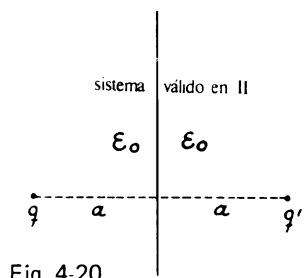


Fig. 4-20

Sistema equivalente válido para II: supongamos que se puede sustituir el dieléctrico ϵ por el vacío poniendo una carga q' en el lugar indicado en la figura 4-20.

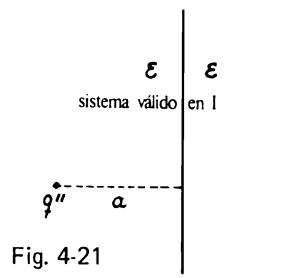


Fig. 4-21

Sistema equivalente válido para I: sustituyamos el vacío por dieléctrico ϵ poniendo una carga q'' en lugar de q .

La expresión del potencial para los puntos del semiespacio II será:

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

y para el semiespacio I

$$\Phi_1 = \frac{q''}{4\pi\epsilon r''}$$

donde r , r' y r'' son las distancias del punto en que se calcula el potencial a los puntos en que se encuentran las cargas q , q' y q'' respectivamente.

Por la continuidad del potencial podemos poner:

$$\Phi_1|_{\text{plano}} = \Phi_2|_{\text{plano}}$$

$$\frac{q''}{4\pi\epsilon a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a}$$

de donde

$$\epsilon_0 q'' = \epsilon (q + q')$$

Los valores de los vectores \vec{D} y sus componentes normales en los puntos del plano son:

$$\vec{D}_{1P} = \frac{q''}{4\pi r_s^2} \vec{u}_2, \quad D_{1PN} = \frac{q''}{4\pi r_s^2} \cos \alpha$$

$$\vec{D}_{2P} = \frac{q}{4\pi r_s^2} \vec{u}_2 + \frac{q'}{4\pi r_s^2} \vec{u}_1, \quad D_{2PN} = \frac{q - q'}{4\pi r_s^2} \cos \alpha$$

Por la continuidad de las componentes normales de \vec{D}

$$q'' = q - q'$$

De esta ecuación y de (1) se obtiene

$$q' = q \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} < 0, \quad q'' = q \frac{2\epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon}$$

Ha resultado que los sistemas equivalentes postulados eran válidos puesto que con ellos se han podido satisfacer todas las condiciones de contorno. Las expresiones del potencial son:

$$\Phi_1 = \frac{2q}{4\pi r (\epsilon_0 + \epsilon)} \quad \text{para I}$$

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon_0 + \epsilon} \frac{1}{r'} \right\} \quad \text{para II}$$

$$\text{Polarización } \vec{P}_1 = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_1, \quad \vec{P}_2 = 0$$

$$\rho_{sa} = -\vec{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = -\vec{n} \cdot \vec{P}_1 = -(\epsilon - \epsilon_0) E_{1N}$$

donde

$$E_{1N} = \frac{q''}{4\pi\epsilon r_s^2} \cos \alpha = \frac{q'' a}{4\pi\epsilon r_s^3}$$

$$\rho_{sa} = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{2qa}{4\pi(\epsilon_0 + \epsilon)r_s^3}$$

La fuerza sobre q es la fuerza, calculada por la ley de Coulomb, entre q y q'

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2} = \frac{q^2 (\epsilon_0 - \epsilon)}{4\pi\epsilon_0 (\epsilon_0 + \epsilon) 4a^2} < 0, \quad \text{de atracción.}$$

★

4-2. Dos semiplanos conductores indefinidos, conectados a potencial cero, forman un diedro recto. Se coloca una carga q en un punto que dista de ambos semiplanos a . Hallar el campo eléctrico en el punto que equidista de los planos una distancia $a/2$.

Solución

Como se vio en el apartado 4-1 B, el sistema de imágenes es el de la figura 4-22.

El campo en el punto P es la superposición de los debidos a cada una de las cargas.

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \vec{u}_1, \quad \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \vec{u}_2, \quad \vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} \vec{u}_3, \quad \vec{E}_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_4^2} \vec{u}_4$$

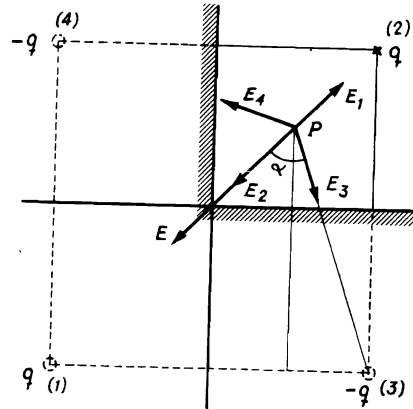


Fig. 4-22

$$r_1^2 = \frac{9a^2}{2}, r_2^2 = \frac{a^2}{2}, r_3^2 = \frac{5}{2}a^2, r_4^2 = \frac{5}{2}a^2$$

$$E_1 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 9a^2}, E_2 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2}, E_3 = E_4 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 5a^2}$$

El campo resultante sólo tiene componentes en la dirección de la bisectriz al diedro.

$$E = E_2 - E_1 + \cos \alpha (E_3 + E_4)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$E = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ 1 - \frac{1}{9} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \right\}, \text{dirigido hacia el vértice.}$$

★

4-3. Dos placas metálicas, paralelas, indefinidas, separadas a una distancia 2a se encuentran a potencial cero. En el centro se coloca una carga q. Hallar el campo en los puntos de la superficie metálica en que sea máximo. Calcúlese con un error menor que el 2 %

Solución

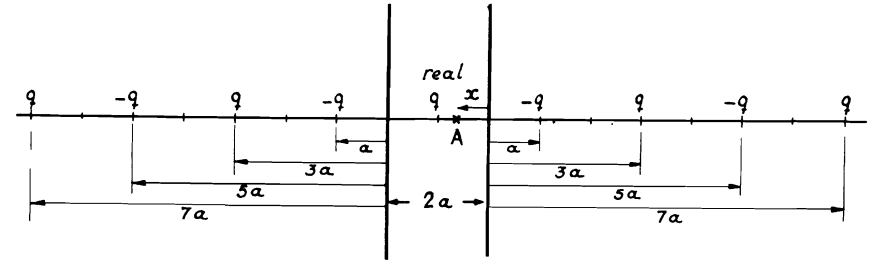


Fig. 4-23

Es un caso de imágenes múltiples (como dos espejos paralelos situados uno enfrente de otro). El campo máximo se produce en los puntos más próximos a la carga real q.

Potencial en el punto A.

$$\Phi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{3a+x} - \frac{1}{5a+x} + \frac{1}{7a+x} - \frac{1}{9a+x} + \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{1}{3a-x} + \frac{1}{5a-x} - \frac{1}{7a-x} + \frac{1}{9a-x} - \dots \right\}$$

Campo en A:

$$E_A = -\frac{d\Phi_A}{dx}$$

$$E_A = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(3a+x)^2} + \frac{1}{(5a+x)^2} - \frac{1}{(7a+x)^2} + \dots \right. \\ \left. \frac{1}{(9a+x)^2} \dots - \frac{1}{(3a-x)^2} + \frac{1}{(5a-x)^2} - \frac{1}{(7a-x)^2} + \frac{1}{(9a-x)^2} - \dots \right\}$$

$$E_{\text{máx}} = E_A|_{x=0} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \dots \right\}$$

En esta serie alternada el error es menor que el primer término despreciado.

Como

$$\frac{1}{81} < \frac{1}{50} = 0,02 = 2\%$$

$$E_{\text{máx}} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} \right\}$$

★

4-4. Una esfera metálica de radio R se pone a potencial V_0 frente a un plano conductor a potencial cero, siendo $D/2$ la distancia del centro de la esfera al plano. Estudiar la sucesión de imágenes necesaria para resolver el problema.

Solución

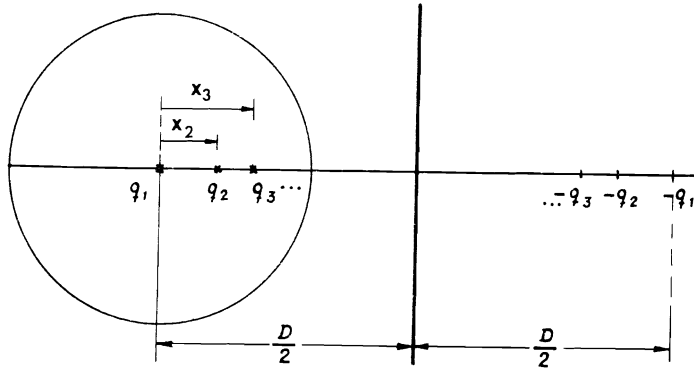


Fig. 4-24

En el centro de la esfera se pondrá una carga que dé potencial V_0 en su superficie.

$$q_1 = 4 \pi \epsilon_0 R V_0$$

La imagen de q_1 dada por el plano será $-q_1$ situada a una distancia del centro de la esfera

$$x'_1 = D$$

La imagen de $-q_1$ dada por la esfera es:

$$q_2 = -(-q_1) \frac{R}{D} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R^2}{D} V_0$$

$$x_2 = \frac{R^2}{D}$$

La imagen de q_2 dada por el plano es:

$$-q_2 = -4 \pi \epsilon_0 \frac{R^2}{D} V_0 \quad x'_2 = D - \frac{R^2}{D} = \frac{D^2 - R^2}{D}$$

La imagen de $-q_2$ dada por la esfera es:

$$q_3 = -(-q_2) \frac{R}{x'_2} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R^3}{D \left(\frac{D^2 - R^2}{D} \right)} V_0 = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R^3 V_0}{D^2 - R^2}$$

Así se siguen calculando cargas imagen y distancias hasta que con las obtenidas se resuelva el problema con la aproximación deseada.

★

4-5. Una carga q_0 se encuentra a una distancia D del centro de una esfera metálica aislada, de radio R . Hallar la carga que ha de tener la esfera para que una mitad de su superficie esté cargada positivamente y el resto negativamente.

Solución

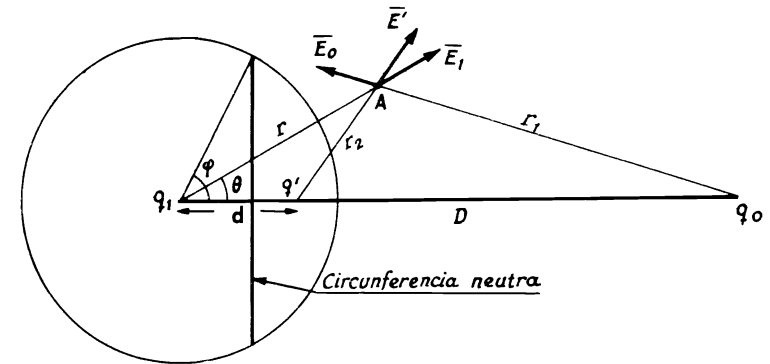


Fig. 4-25

La imagen de q_0 es q' . Además de q' hay que poner en el centro de la esfera otra carga q_1 que, manteniendo equipotencial la superficie esférica, permita cumplir la condición pedida.

Potencial en A :

$$\Phi = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4 \pi \epsilon_0 r_2} + \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

donde $q' = -q_0 \frac{R}{D}$ y q_1 es, por ahora, desconocida.

$$r_1^2 = r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta \quad r_2^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{q_0}{(r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q_1}{r} \right\}$$

La componente radial del campo eléctrico será:

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{-1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{-\frac{1}{2} q_0 (2r - 2D \cos \theta)}{(r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\frac{1}{2} q' (2r - 2d \cos \theta)}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} + \frac{-q_1}{r^2} \right\}$$

Sobre la superficie esférica habrá una circunferencia (en este caso, circunferencia máxima), llamada *línea neutra* que separa la zona de carga positiva de la de carga negativa. Por simetría estará en $\theta = \pi/2$, $r = R$. En los puntos de la línea neutra la densidad de carga es nula. Entonces, la continuidad de las componentes normales de \vec{D} exige que sea $D_{r, r=R} = 0$, ya que el campo en el interior de la esfera es nulo.

$$D_r|_{r=R, \theta=\pi/2} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{q_0 R}{(R^2 + D^2)^{3/2}} + \frac{q' R}{(R^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{q_1}{R^2} \right\} = 0$$

Sustituyendo los valores de q' y d , se despeja q_1 , que resulta:

$$q_1 = q_0 R \frac{D^2 - R^2}{(R^2 + D^2)^{3/2}}$$

La carga de la esfera será, pues:

$$Q = q' + q_1 = q_0 R \left\{ \frac{D^2 - R^2}{(R^2 + D^2)^{3/2}} - \frac{1}{D} \right\}$$

★

4-6. Una esfera de radio R se pone a potencial V_0 . Se le acerca una carga q y se observa que cuando ésta se encuentra a una distancia D de la esfera no se ejerce ninguna fuerza sobre ella. Calcular q .

Solución

Se puede sustituir la esfera metálica por dos cargas: una $q' = -q \frac{R}{D}$ situada a una distancia $d = \frac{R^2}{D}$ del centro de la esfera, y una $q_1 = 4\pi \epsilon_0 R V_0$. El par q y q' pondría la superficie esférica a potencial cero y q_1 se introduce para poner la superficie esférica a V_0 .

Según la ley de Coulomb, la fuerza ejercida sobre q es:

$$F_q = \frac{q_1 q}{4\pi \epsilon_0 D^2} + \frac{q' q}{4\pi \epsilon_0 (D-d)^2} = \frac{R V_0}{D^2} q - \frac{R D}{4\pi \epsilon_0 (D^2 - R^2)^2} q^2 = 0$$

de donde, desechando la solución trivial $q = 0$,

$$q = \frac{4\pi \epsilon_0 (D^2 - R^2)^2}{D^3} V_0$$

★

4-7. Se tienen dos cargas puntuales q separadas a una distancia $2d$. Se introduce entre ellas una esfera metálica a potencial cero, situada de forma que su centro coincida con el punto medio del segmento rectilíneo que une las dos cargas. Hallar el radio de la esfera para el cual no se ejerce fuerza sobre las cargas.

Solución

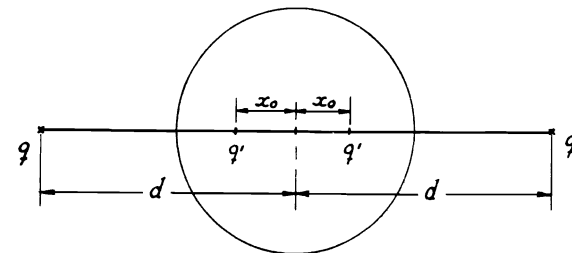


Fig. 4-26

El sistema equivalente es el de la fig. 4-26.

$$x_0 = \frac{R^2}{d} \quad q' = -q \frac{R}{d}$$

$$F_q = q \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 4d^2} - q \frac{R}{d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \left(d + \frac{R^2}{d}\right)^2} - q \frac{R}{d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} \right\} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{4d^2} - \frac{R}{d} \left(\frac{1}{\left(d + \frac{R^2}{d}\right)^2} + \frac{1}{\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} \right) \right\}$$

De $F_q = 0$ se obtiene:

$$\frac{1}{4Rd^3} = \frac{2(d^4 + R^4)}{(d^4 - R^4)^2}$$

Suponiendo $d \gg R$

$$\frac{1}{4Rd^3} \approx \frac{2}{d^4} \quad R \approx \frac{d}{8}$$

★

4-8. Una recta indefinida, cargada con q coul/m, se encuentra paralela al eje de un cilindro conductor de radio R_0 , a una distancia d de dicho eje ($d > R_0$). Hallar el potencial en la región exterior al cilindro por el método de imágenes y calcular la distribución de carga inducida sabiendo que el cilindro está aislado y descargado.

Solución

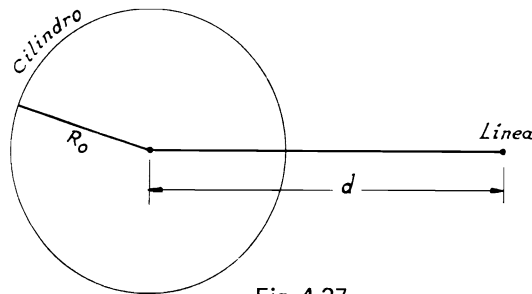


Fig. 4-27

En el apartado 4-1 se ha dicho cuál es la imagen de una línea cargada paralela a un cilindro conductor. No obstante, vamos a razonar cómo se puede llegar a este resultado.

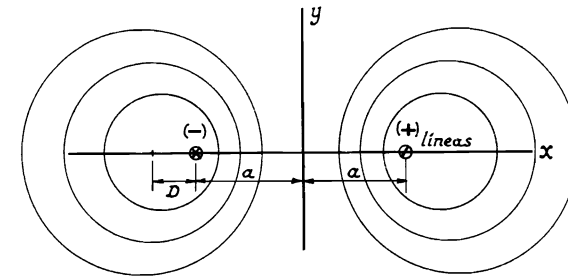


Fig. 4-28

En el problema 2-20 se ha obtenido que las superficies equipotenciales correspondientes a dos líneas paralelas cargadas con cargas de distinto signo son cilindros cuyos ejes se encuentran en el plano determinado por las líneas (fig. 4-28). La comparación de las figuras 4-27 y 4-28 sugiere que se puede sustituir el cilindro conductor por una línea cargada con $-q$ situada a una distancia tal de la línea real que el cilindro coincida con una de las superficies equipotenciales de la figura 4-28. Para que esto ocurra, la distancia $D + 2a$ de esta última figura, ha de ser igual a la distancia d del problema. Cada valor de D determina una circunferencia y hemos de hallar qué valor de D corresponde al radio R_0 . Expresaremos que esa circunferencia es equipotencial haciendo que el potencial en M sea igual al potencial en N (fig. 4-29).

Se obtiene fácilmente que el potencial en P es:

$$\Phi = \Phi_q + \Phi_{-q} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + C$$

donde, por simetría, $C = 0$

Poniendo $\Phi_M = \Phi_N$

$$\ln \frac{R+D}{R+d} = \ln \frac{R-D}{d-R} \quad \text{de donde } D = \frac{R^2}{d}$$

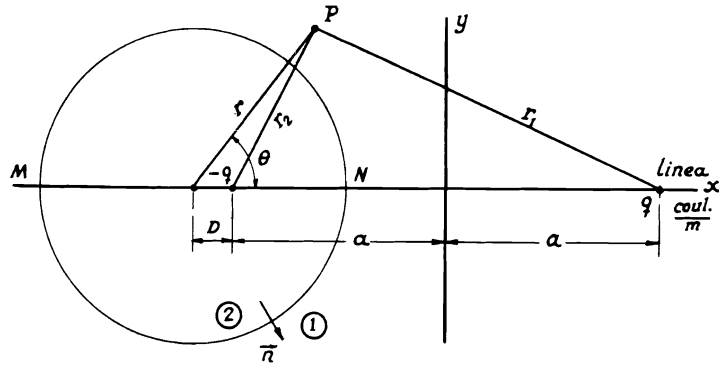


Fig. 4-29

Llegamos, pues, a la siguiente conclusión: la imagen de una línea q es una línea $-q$, situada a una distancia $D = R^2/d$ del eje del cilindro.

El potencial en un punto (r, θ) exterior al cilindro será:

$$\Phi = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \ln \frac{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$$

Como el cilindro es equipotencial, las líneas de campo son normales a él.

$$\vec{E}_r = - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{u}_r$$

$$E_r = - \frac{q}{2\pi \epsilon_0} (d^2 - R^2) \frac{r(d^2 + R^2) - d \cos \theta (r^2 + R^2)}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta) (r^2 d^2 + R^4 - 2rdR^2 \cos \theta)}$$

En la superficie del cilindro

$$\rho_s = D_{1N} - D_{2N}$$

y como $\vec{D}_2 = 0$

$$\rho_s = D_{1N} = \epsilon_0 E_r |_{r=R_0} = - \frac{q}{2\pi R} \frac{d^2 - R^2}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)}$$

★

4-9. En el interior de un cilindro metálico tubular, de radio R , hay dos líneas cargadas con $\pm \lambda$ coul/m, paralelas al eje del cilindro y simétricamente despla-

zadas con respecto a éste. Calcular la distancia entre conductores para que no se atraigan.

Solución

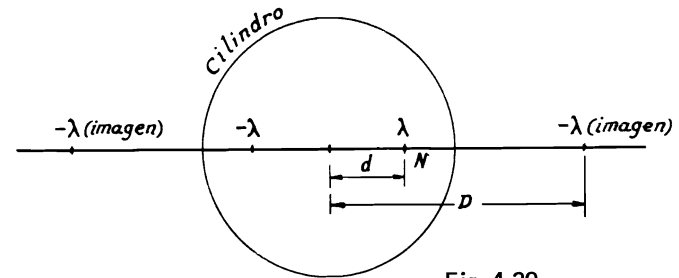


Fig. 4-30

El sistema de imágenes es el de la figura 4-30.

Campo debido a una línea

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

Las imágenes se hallan a una distancia $D = R^2/d$ del eje del cilindro.

Campo en N (suponiendo que no está distorsionado por la presencia de la propia línea $+\lambda$)

$$E_N = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left\{ - \frac{1}{D-d} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{D+d} \right\}$$

Si el campo en N es nulo, la línea no está sometida a ninguna fuerza. Al hacer $E_N = 0$ se obtiene:

$$d^2 = R^2 (-2 \pm \sqrt{5})$$

De estas dos soluciones sólo vale

$$d^2 = R^2 (-2 + \sqrt{5})$$

resultando que la distancia entre líneas ha de ser

$$2d = 2R \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$$

★

4-10. Repetir el problema anterior imponiendo la condición de que el valor absoluto de la carga inducida en la cara interior del tubo tenga un valor máximo numéricamente igual a q .

Solución

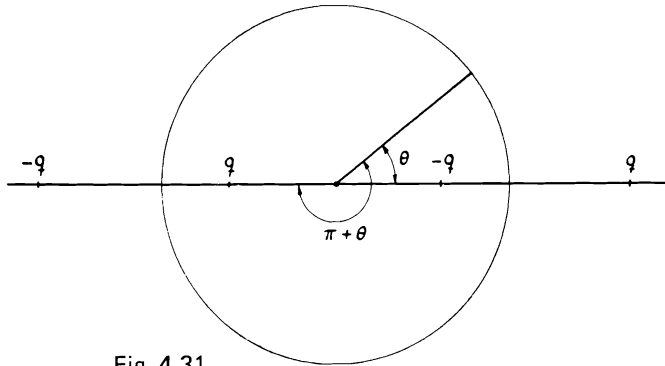


Fig. 4-31

En el problema 4-8 se ha obtenido la expresión de la carga inducida sobre la cara exterior del tubo por el par de líneas de la derecha. Teniendo en cuenta el distinto significado de d y que ahora la carga inductora es negativa

$$\rho_{s1} = \frac{q}{2\pi R} \frac{R^2 - d^2}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)}$$

El par de líneas de la izquierda induce una densidad de carga cuya expresión se obtiene de la anterior sin más que cambiar q por $-q$ y θ por $\pi + \theta$.

$$\rho_{s2} = \frac{-q}{2\pi R} \frac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta}$$

La densidad total de carga inducida es

$$\rho_s = \rho_{s1} + \rho_{s2} = \frac{q(R^2 - d^2)}{2\pi R} \left\{ \frac{1}{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta} - \frac{1}{R^2 + d^2 + 2Rd \cos \theta} \right\}$$

ρ_s será máxima para el valor de θ que haga máximo el primer sumando ya que para ese mismo valor el segundo es mínimo. Esto ocurre cuando $\cos \theta = +1, \theta = 0$. Cuando $\cos \theta = -1, \theta = \pi, \rho_s$ es mínimo, pero su módulo tam-

bién es máximo. El valor de ese máximo es:

$$\rho_{s \max} = \frac{2q\bar{d}}{\pi(R^2 - d^2)}$$

valor que ha de ser igual (numéricamente) a q .

De $\rho_{s \max} = q$ se obtiene

$$d = -\frac{1}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + R^2}$$

★

4-11. Una carga puntual q se halla cerca de una esfera conductora descargada, de radio R . Calcular la distancia a la que debe encontrarse del centro de la esfera para que la línea neutra se reduzca a un punto.

Solución

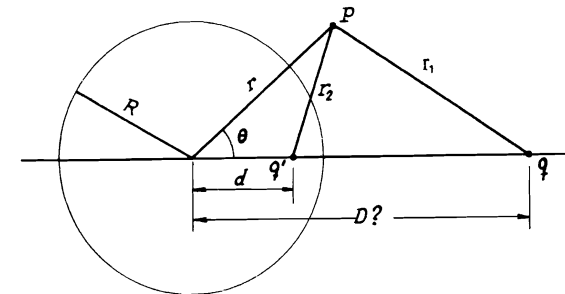


Fig. 4-32

$$d = R^2/D \quad q' = -q \frac{R}{D}$$

Potencial en P

$$\Phi_P = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(r^2 + D^2 - 2Dr \cos \theta)^{1/2}} - \frac{R}{(r^2 D^2 + R^4 - 2rDR^2 \cos \theta)^{1/2}} \right\}$$

El campo en la superficie del cilindro es

$$E_r|_{r=R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{R-D \cos \theta}{(R^2 + D^2 - 2DR \cos \theta)^{3/2}} - \frac{D (D-R \cos \theta)}{R(D^2 + R^2 - 2RD \cos \theta)^{3/2}} \right\}$$

La densidad de carga inducida será $\rho_s = \epsilon_0 E_r|_{r=R}$

La línea neutra es el lugar geométrico de los puntos en que $\rho_s = 0$. El punto al que ha de reducirse la línea neutra tiene que ser uno de los polos de la esfera: $\theta = 0, \theta = \pi, \cos \theta = \pm 1$.

Para que $\rho_s = 0$

$$R - D \cos \theta = \frac{D}{R} (D - R \cos \theta), R^2 - RD \cos \theta = D^2 - R^2 \cos \theta$$

Si $\theta = 0, \cos \theta = 1$

$$R^2 - RD = D^2 - R^2, D = R$$

Si $\theta = \pi, \cos \theta = -1$

$$R^2 + RD = D^2 + R^2, RD = D^2, D = R$$

★

4-12. Un rayo electrónico cilíndrico de radio a pasa junto a un plano conductor que es paralelo a su eje y está situado a una distancia d de éste. Hallar el campo que tiende a dispersar el rayo en los bordes más cercano y más alejado del conductor, respectivamente.

Solución

Cada elemento diferencial de carga dará una imagen equidistante del plano, por lo que la imagen del cilindro será la de la figura.

El campo en un punto P constará de dos sumandos: uno debido al rayo y otro debido a la imagen.

Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro de radio r_1 concéntrico con el rayo y exterior a él.

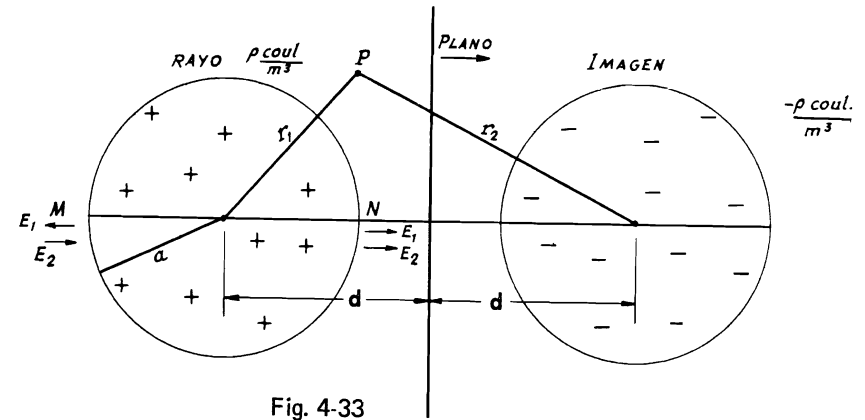


Fig. 4-33

$$2\pi r_1 \ell D_1 = \pi a^2 \ell$$

$$D_1 = \frac{a^2}{2r_1} \rho \quad E_1 = \frac{a^2}{2\epsilon_0 r_1} \rho = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1}$$

$$\Phi_1 = -\frac{a^2}{2\epsilon_0} \rho \ln r_1 + C_1$$

Análogamente

$$\Phi_2 = +\frac{a^2}{2\epsilon_0} \rho \ln r_2 + C_2$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{a^2}{2\epsilon_0} \rho \ln \frac{r_2}{r_1} + C$$

Si el plano está a potencial cero, $C = 0$

$$\Phi = \frac{a^2}{2\epsilon_0} \rho \ln \frac{r_2}{r_1}$$

En los puntos M y N el campo sólo tiene componente radial.

$$E_1 = \frac{a^2}{2\epsilon_0 r_1} \rho \quad E_2 = -\frac{a^2}{2\epsilon_0 r_2} \rho$$

En M las contribuciones del rayo y la imagen se restan, y en N se suman. Los campos de dispersión serán:

$$E_{dM} = \frac{a^2}{2\epsilon_0 a} \rho - \frac{a^2}{2\epsilon_0 (2d+a)} \rho = \frac{ad}{\epsilon_0 (2d+a)} \rho$$

$$E_{dN} = \frac{a^2}{2\epsilon_0 a} \rho + \frac{a^2}{2\epsilon_0 (2d-a)} \rho = \frac{ad}{\epsilon_0 (2d-a)} \rho$$

★

4-13. Hallar la densidad de carga inducida en un plano conductor cuando se coloca una carga puntual q a una distancia d .

Solución

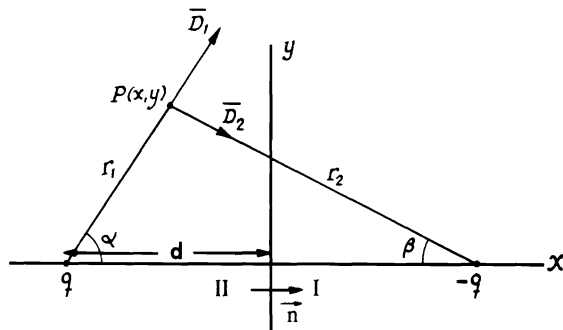


Fig. 4-34

Potencial en P

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

$$D_1 = \frac{q}{4\pi r_1^2} \quad D_2 = \frac{q}{4\pi r_2^2}$$

$$r_1^2 = (d+x)^2 + y^2 \quad , \quad r_2^2 = (x-d)^2 + y^2$$

$$\cos \alpha = \frac{d+x}{r_1} \quad , \quad \cos \beta = \frac{d-x}{r_2}$$

En los puntos del plano el campo \vec{D} sólo tiene componente normal

$$D_{1x} = |\vec{D}_1| \cos \alpha \quad D_{2x} = |\vec{D}_2| \cos \beta$$

$$D_{1x} = \frac{q}{4\pi r_1^3} (d+x) \quad D_{2x} = \frac{1}{4\pi r_2^3} (d-x)$$

$$D_x = D_{1x} + D_{2x} = \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{d+x}{r_1^3} + \frac{d-x}{r_2^3} \right\}$$

En el plano

$$D_x|_{x=0} = \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{d}{(d^2+y^2)^{3/2}} + \frac{d}{(d^2+y^2)^{3/2}} \right\} = \frac{qd}{2\pi} \frac{1}{(d^2+y^2)^{3/2}}$$

La densidad de carga de superficie es

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s$$

$D_{1N} = 0$ por tratarse de un conductor

$$\rho_s = -D_x = -\frac{qd}{2\pi} \frac{1}{(d^2+y^2)^{3/2}}$$

★

4-14. Repetir el problema anterior para una línea cargada paralela a un plano.

Solución

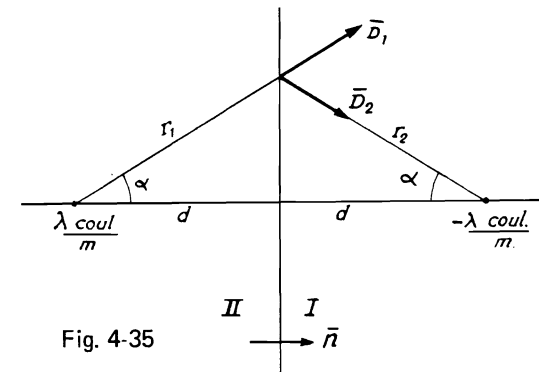


Fig. 4-35

Campo debido a la línea

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r_1}$$

Campo debido a la imagen

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r_2}$$

$$D_{1x} = D_1 \cos \alpha, \quad D_{2x} = D_2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{r_1} = \frac{d}{r_2}$$

$$D_{1x} = \frac{\lambda d}{2\pi r_1^2}, \quad D_{2x} = \frac{\lambda d}{2\pi r_2^2}$$

$$r_2^2 = r_1^2 = d^2 + y^2$$

$$D_x = D_{1x} + D_{2x} = \frac{\lambda d}{\pi(d^2 + y^2)}$$

$$D_{1N} - D_{2N} = \rho_s, \quad D_{1N} = 0, \quad D_{2N} = D_x$$

$$\rho_s = -D_x = -\frac{\lambda d}{\pi(d^2 + y^2)}$$

★

4-15. Una espira circular, de radio R , de conductor muy delgado se carga con q coul uniformemente repartidos. Se coloca una esfera de radio R , aislada y descargada, tangente al plano de la espira en el centro de ésta. Hallar el potencial que toma la esfera.

Solución

Cada elemento dq de la espira da una imagen $dq' = -dq \frac{R}{D}$ situada a una distancia $d = \frac{R^2}{D}$ del centro de la esfera. Es, pues, evidente que la imagen de espira será otra espira paralela a la dada y situada como se indica en la figura 4-36.

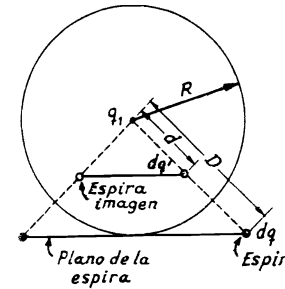


Fig. 4-36

Como la carga neta de la esfera es nula, hemos de completar el sistema equivalente poniendo en el centro una carga q_1 tal que

$$q' + q_1 = 0, \quad q_1 = -q' = \frac{q}{\sqrt{2}}$$

El potencial de la esfera será:

$$V_0 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R}$$

★

4-16. Una superficie plana, en forma de corona circular de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), tiene una carga uniformemente repartida σ coul/m². Una esfera metálica, de radio R ($R < R_1$), previamente aislada y descargada, se coloca con su centro coincidente con el de la corona. Hallar el potencial de la esfera.

Solución

Transformando elemento a elemento el área de la corona se obtiene otra corona, interior a la esfera, cuyos radios son:

$$d_2 = \frac{R^2}{R_2}, \quad d_1 = \frac{R^2}{R_1}, \quad d_1 > d_2$$

$$dq = \sigma r dr d\varphi$$

$$dq' = -dq \frac{R}{D} = -\frac{q}{2\pi} d\varphi \frac{R}{D}$$

$$q' = -\frac{qR}{2\pi D} \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{qR}{D}$$

$$D = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

$$q' = -\frac{q}{\sqrt{2}}$$

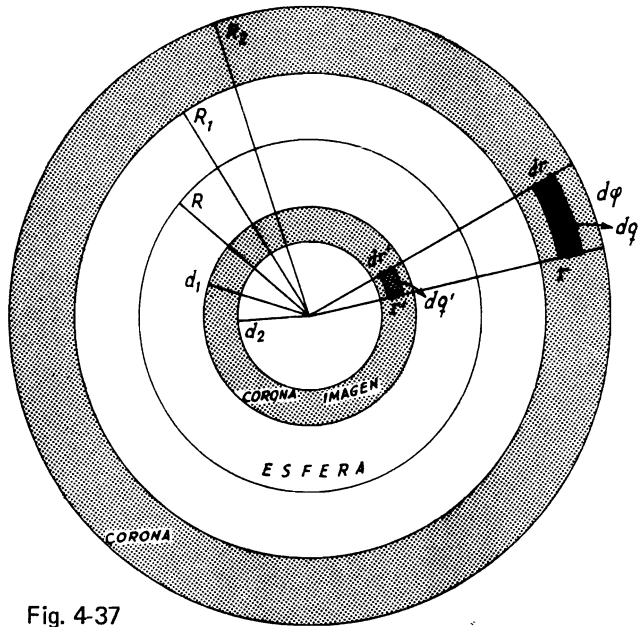


Fig. 4-37

Elemento de carga imagen: $dq' = \sigma' r' dr' d\phi$

Según sabemos $dq' = -dq \frac{R}{r}$ y $r' = \frac{R^2}{r}$

$$dq' = -dq \frac{R}{r} = -\sigma r dr d\phi \frac{R}{r} = -\sigma R dr d\phi$$

y como $r' = \frac{R^2}{r}$, $dr = -\frac{R^2}{r'^2} dr'$

Sustituyendo

$$dq' = \sigma R^3 \frac{1}{r'^2} dr' d\phi$$

Integrando

$$q' = \sigma R^3 \int_{d_1}^{d_2} \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \sigma R (R_1 - R_2)$$

Para completar el sistema, tenemos que poner en el centro una carga q_1 tal que la carga neta de la esfera sea nula, es decir:

$$q' + q_1 = 0, \quad q_1 = -q' = 2\pi \sigma R (R_2 - R_1)$$

Potencial de la esfera

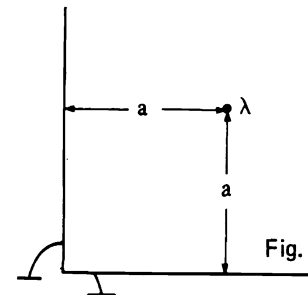
$$V_0 = \frac{2\pi \sigma R (R_2 - R_1)}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{\sigma (R_2 - R_1)}{2\epsilon_0}$$

★

TRANSFORMACION CONFORME

4-17. Dos planos conductores que forman un diedro recto se hallan conectados a potencial cero. Junto a los planos, a una distancia a de ellos, hay una línea indefinida cargada con $+\lambda$ coul/m. Hallar la distribución de potencial.

Solución



Aplicamos una transformación conforme del tipo potencial

$$W = AZ^p = A \rho^p e^{jp\phi}$$

Si hacemos $p = 2$ los dos semiplanos se transforman en el plano $v = 0$ de W .

$$W = A \rho^2 \cos 2\phi + j A \rho^2 \sin 2\phi$$

El punto donde está la línea se transforma en el punto de W de coordenadas

$$u_1 = A \left(a \sqrt{2} \right)^2 \cos (2\pi/4) = 0$$

$$v_1 = A \left(a \sqrt{2} \right)^2 \sin (2\pi/4) = 2 A a^2$$

En el plano W determinamos el potencial por el método de imágenes. Aplicando los teoremas de Gauss y de superposición.

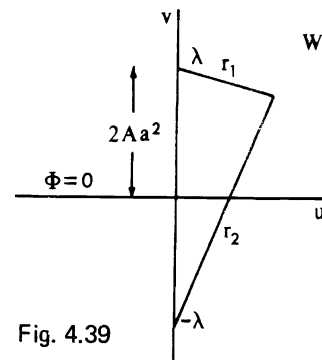


Fig. 4.39

$$2 \pi r_1 D_1 = \lambda \ell \quad D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r_1}$$

$$2 \pi r_2 D_2 = -\lambda \ell \quad D_2 = \frac{-\lambda}{2\pi r_2}$$

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r_1} \quad E_2 = \frac{-\lambda}{2\pi \epsilon r_2}$$

$$\Phi_1 = - \int E_1 dr_1 = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \int \frac{1}{r_1} dr_1 = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \ln r_1 + K_1$$

$$\Phi_2 = - \int E_2 dr_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \int \frac{1}{r_2} dr_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \ln r_2 + K_2$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + K$$

Como los semiplanos están a potencial cero, $K = 0$.

Teniendo en cuenta que:

$$r_2^2 = (v - 2Aa^2)^2 + u^2$$

$$r_1^2 = (v + 2Aa^2)^2 + u^2$$

y que

$$u = A \rho^2 \cos 2\varphi$$

$$v = A \rho^2 \sin 2\varphi$$

resulta

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon} \ln \frac{\rho^4 + 4a^4 - 4a^2 \rho^2 \sin 2\varphi}{\rho^4 + 4a^4 + 4a^2 \rho^2 \sin 2\varphi}$$

★

4-18. Considérense dos semiplanos conductores indefinidos que forman un diedro recto y están conectados a potencial cero. Estos planos limitan una región en la que el campo electrostático está creado por cargas lejanas. Hallar la distribución de potencial sabiendo que si se coloca una carga puntual de $q = 10^{-9}$

coul en el punto que equidista de los planos $a = 1 \text{ cm}$, esta carga no está sometida a fuerza alguna.

Solución

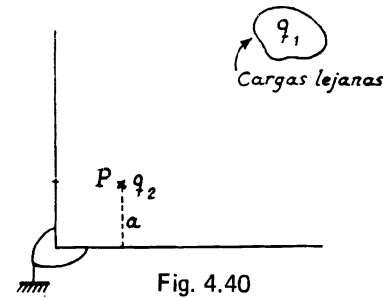


Fig. 4.40

El hecho de que el campo esté creado por cargas lejanas es, a todos los efectos prácticos, equivalente a que haya cargas en el infinito. Esto nos va a privar de un dato para cuando haya que determinar constantes, puesto que la solución de potencial que encontremos no será regular en el infinito. Este dato lo supliremos

con el que nos suministra el saber que sobre la carga de prueba no se ejerce fuerza.

La fuerza ejercida sobre la carga es el producto del valor del campo en P por el valor de la carga. Este campo será la superposición del producido por las cargas lejanas y el producido por la carga de prueba. De este último no podemos considerar más que el debido a las imágenes de la carga de prueba dadas por los semiplanos porque, según sabemos por la ley de Coulomb, el campo producido por una carga puntual en el punto en que se encuentra la carga es infinito. Esto es lo mismo que suponer que la carga de prueba no altera la distribución de campo salvo el campo adicional que producen sus imágenes.

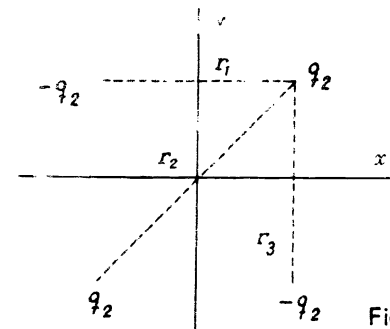


Fig. 4.41

Como $r_1 = r_3 = 2a$ y $r_2 = 2a\sqrt{2}$, el campo debido a las imágenes será:

$$\vec{E}_2 = \left(\frac{-q_2}{4\pi \epsilon 2a} + \frac{q_2}{4\pi \epsilon 2a\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{q_2}{4\pi \epsilon 2a\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{q_2}{4\pi \epsilon 2a} \right) \vec{u}_y = \frac{q_2}{16\pi \epsilon a} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

Para que sobre la carga de prueba no se ejerza ninguna fuerza el campo en P tendrá que ser nulo, luego el campo debido a las cargas lejanas será:

$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 = \frac{q_2}{16\pi\epsilon a} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

Ahora el problema se reduce a resolver el sistema de la figura 4-42, en la cual se conoce el valor del campo en P.

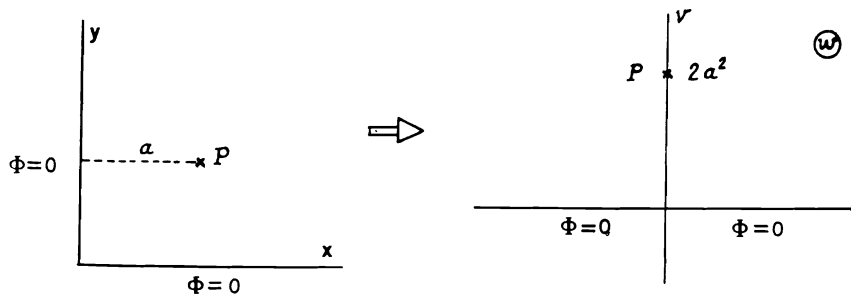


Fig. 4-42

Mediante la transformación potencial:

$$W = A Z^2 = A \rho^2 \cos 2\varphi + j A \rho^2 \sin 2\varphi$$

se transforman los semiplanos de Z en el plano v = 0 de W, y el punto (a,a) de Z en el (0, 2a^2) de W.

El potencial en W es:

$$\Phi = C_1 v + C_2$$

y como $\Phi = 0$ para $v = 0$, $C_2 = 0$

$$\Phi = C_1 A \rho^2 \sin 2\varphi = C_2 \rho^2 \sin 2\varphi$$

El campo es:

$$\vec{E}_1 = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \vec{u}_\varphi = 2 C_2 \rho (\sin 2\varphi \vec{u}_r + \rho \cos 2\varphi \vec{u}_\varphi)$$

En el punto P ($a\sqrt{2}$, $\pi/4$)

$$E_1 = -2 C_2 a \sqrt{2}$$

Igualando [1] y [2]:

$$C_2 = -\frac{q_2}{32\sqrt{2}\pi\epsilon a^2}$$

y el potencial resulta:

$$\Phi = -\frac{q_2 \rho^2 \sin 2\varphi}{32\sqrt{2}\pi\epsilon a^2}$$

Con los valores de a y q₂ del enunciado:

$$\Phi = -0,796 \cdot 10^4 \rho^2 \sin 2\varphi$$

★

4-19. Tres hilos conductores indefinidos están cargados con λ coul/m, y situados paralelos entre sí de forma que sus trazas en el plano normal forman un triángulo equilátero de lado $c\sqrt{3}$. Hallar la ecuación de las líneas equipotenciales en el plano normal tomando como origen de coordenadas el centro del triángulo y como eje polar la semirrecta que une el origen con uno de los vértices.

Solución

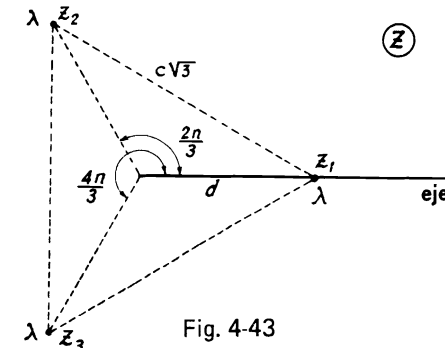


Fig. 4-43

Mediante la transformación

$$W = Z^3$$

los puntos Z_1, Z_2 y Z_3 se transforman en

$$W_1 = Z_1^3 = c^3, W_2 = Z_2^3 = c^3, W_3 = Z_3^3 = c^3$$

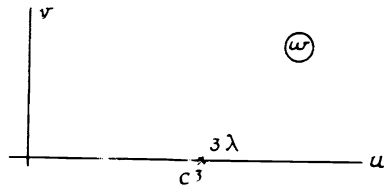


Fig. 4-44

Las líneas equipotenciales en W son circunferencias con centro en el punto $(c^3, 0)$. Su ecuación es:

$$(u - c^3)^2 + v^2 = K^2$$

y como $u = \rho^3 \cos 3\varphi, v = \rho^3 \sin 3\varphi$, resulta:

$$\rho^6 + c^6 - 2c^3 \rho^3 \cos 3\varphi = K^2$$

que es la ecuación de las líneas equipotenciales en Z .

★

4-20. Dos semiplanos conductores que forman un diedro recto se mantienen a potencial V_0 . Hallar la densidad de carga en la superficie de los conductores a un metro de la arista del diedro.

Solución

Hallemos el potencial aplicando la transformación

$$W = Z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$$

Como los dos semiplanos se transforman en el plano $v = 0$, el potencial en W es:

$$\Phi = K v + K_1$$

y como $\Phi|_{v=0} = V_0, K_1 = V_0$

$$\Phi = K v + V_0 = 2Kxy + V_0$$

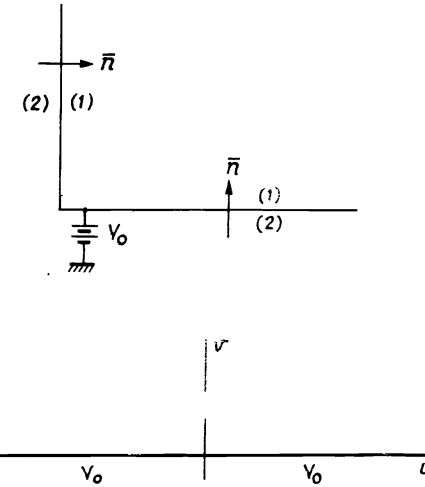


Fig. 4-45

El campo eléctrico es:

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi = -2K (y \vec{u}_x + x \vec{u}_y)$$

$$\vec{D} = -2\epsilon K (y \vec{u}_x + x \vec{u}_y)$$

En el punto $(1, 0)$

$$\vec{D}_1 = -2\epsilon K \vec{u}_y$$

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_{sx} = -2\epsilon K \vec{u}_y \cdot \vec{n} = -2\epsilon K$$

En el punto $(0, 1)$

$$\vec{D}_1 = -2\epsilon K \vec{u}_x$$

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_{sy} = -2\epsilon K \vec{u}_x \cdot \vec{n} = -2\epsilon K$$

★

4-21 Dos conductores planos semi-infinitos, dispuestos como se indica en la fig. 4-46, separado a una distancia despreciable, están conectados a potenciales V_0 y $-V_0$. Hallar la expresión del potencial.

Solución

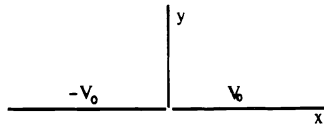


Fig. 4-46

La transformación conforme idónea para este problema es la logarítmica.

$$W = \ln Z = \ln \rho + j\varphi$$

$$u = \ln \rho, v = \varphi$$

La recta correspondiente a V_0 es $\varphi = v = 0$, y la correspondiente a $-V_0$ es $\varphi = v = \pi$.

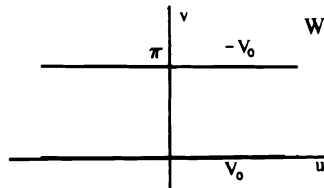


Fig. 4-47

En el plano W tenemos un condensador plano $\Phi = A v + B$

Con las condiciones de contorno escribimos

$$\begin{cases} -V_0 = A\pi + B \\ V_0 = B \end{cases}$$

de donde $A = -2V_0/\pi$ y $B = V_0$.

$$\Phi = -\frac{2V_0}{\pi} v + V_0$$

Pasando de nuevo al plano Z

$$\Phi = -\frac{2V_0}{\pi} \varphi + V_0$$

que es la solución pedida.

Las constantes podían haberse incluido ya desde el principio en la expresión de la transformación.

$$W = C_1 \ln Z + C_2 = C_1 \ln \rho + C_1 j\varphi + C_2$$

$$u = C_1 \ln \rho + C_2, v = C_1 \varphi$$

Como las líneas equipotenciales en Z son $\varphi = \text{constante}$, en W lo serán las líneas $v = \text{constante}$, luego tomaremos como función potencial $\Phi = v$.

Ahora bien, para la determinación del potencial hay dos condiciones de contorno, luego la expresión de Φ debe llevar dos constantes indeterminadas. Esto se consigue poniendo:

$$W = C_1 \ln Z + jC_2$$

$$u = C_1 \ln \rho, v = C_1 \varphi + C_2 = \Phi$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan como hemos hecho antes.

★

4-22. Dos cilindros concéntricos de radios R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) están conectados a potenciales $\Phi_1 = -V_0$ y $\Phi_2 = 2V_0$. Supuestos los conductores de longitud infinita, hallar la expresión del potencial.

Solución

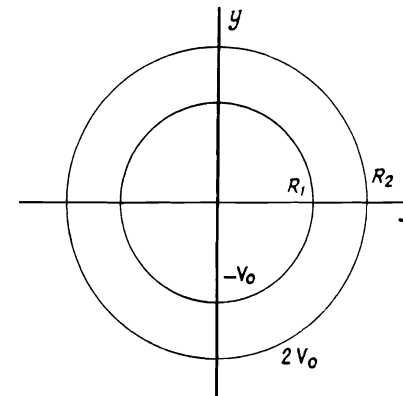


Fig. 4-48

Apliquemos la transformación logarítmica:

$$W = C_1 \ln Z + C_2$$

$$u = C_1 \ln \rho + C_2, v = C_1 \varphi$$

Las superficies equipotenciales en Z son $\rho = \text{cte}$, luego la función potencial será $\Phi = u$.

$$u = \Phi = C_1 \ln \rho + C_2$$

$$\begin{cases} -V_0 = C_1 \ln R_1 + C_2 \\ 2V_0 = C_1 \ln R_2 + C_1 \end{cases}$$

de donde

$$C_1 = \frac{3V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, C_2 = -V_0 \frac{\ln (R_1^2 R_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\Phi = \frac{V_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{\rho^3}{R_1^2 R_2}$$

También se puede empezar transformando el contorno

$$W = \ln Z = \ln \rho + j\varphi = u + jv$$

El cilindro 1 se transforma en $u = \ln R_1$, $0 < v < 2\pi$ y el cilindro 2 en $u = \ln R_2$, $0 < v < 2\pi$. En el plano W queda un condensador plano en el cual despreciamos el efecto de borde.

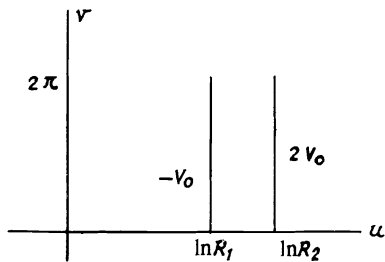


Fig. 4-49

$$\Phi = A u + B = A \ln \rho + B$$

$$\begin{cases} -V_0 = A \ln R_1 + B \\ 2V_0 = A \ln R_2 + B \end{cases}$$

y obtenemos la misma solución.

★

4-23. Un conductor cilíndrico de R metros de radio tiene su eje paralelo, a una distancia d metros, a un plano conductor. Calcular el campo máximo en la superficie del plano cuando entre él y el cilindro existe una diferencia de potencial de V_0 voltios.

Solución

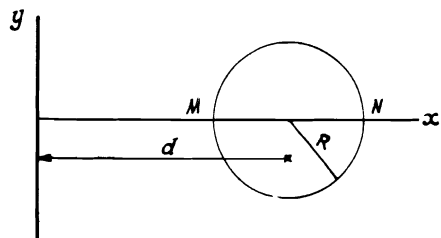


Fig. 4-50

Se ha visto en el apartado 4-6 que la transformación

$$W = C_1 \ln \frac{Z-a}{Z+a} + C_2$$

transforma en rectas paralelas al eje v las circunferencias centradas en

el eje x del plano Z . Hemos de ajustar los parámetros de la transformación para que el plano de la fig. 4-50 sea una circunferencia de radio infinito y centro en el infinito.

$$u = C_1 \ln \left| \frac{Z-a}{Z+a} \right| + C_2 = \Phi = C_1 \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + C_2$$

Si consideramos que el plano está a potencial cero,

$$\Phi(0,0) = C_2 = 0$$

El cilindro estará a potencial V_0 y por lo tanto

$$\Phi_M = \Phi(d-R, 0) = C_1 \ln \sqrt{\frac{R+a-d}{a-R+d}} = V_0$$

$$\Phi_N = \Phi(d+R, 0) = C_1 \ln \sqrt{\frac{d+R-a}{d+R+a}} = V_0$$

Igualando los argumentos de los logaritmos se obtiene:

$$a = \sqrt{d^2 - R^2}$$

$$C_1 = V_0 \left(\ln \frac{d+R - \sqrt{d^2 - R^2}}{d+R + \sqrt{d^2 - R^2}} \right)^{-1}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión del potencial

$$\Phi = V_0 \left(\ln \frac{d+R - \sqrt{d^2 - R^2}}{d+R + \sqrt{d^2 - R^2}} \right)^{-1} \ln \sqrt{\frac{(x - \sqrt{d^2 - R^2})^2 + y^2}{(x + \sqrt{d^2 - R^2})^2 + y^2}}$$

Es casi evidente que el campo máximo se producirá en el punto $(0,0)$, que es el más cercano al cilindro. En ese punto el campo sólo tendrá componente horizontal, y el valor máximo será:

$$E_x(0,0) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} = \frac{2V_0}{\sqrt{d^2 - R^2}} \left(\ln \frac{d+R - \sqrt{d^2 - R^2}}{d+R + \sqrt{d^2 - R^2}} \right)^{-1}$$

★

4-24. Dos conductores cilíndricos de radios $R_1 = 2$ cm y $R_2 = 4$ cm se conectan a potenciales $V_1 = 1.000$ volt y $V_2 = 500$ volt. La distancia entre ejes es 12 cm. Hallar la expresión del potencial.

Solución

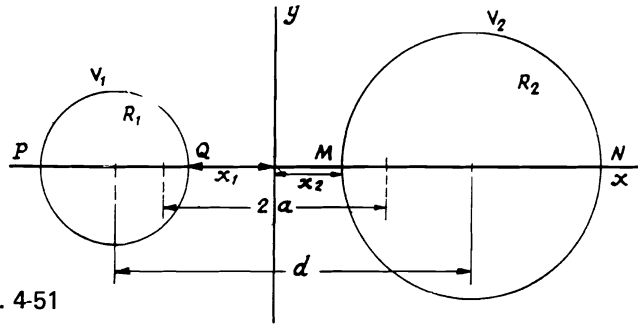


Fig. 4-51

Como en el problema anterior, la transformación será:

$$W = C_1 \ln \frac{Z-a}{Z+a} + C_2$$

$$u = C_1 \ln \left| \frac{Z-a}{Z+a} \right| + C_2 = \Phi$$

$$\Phi = C_1 \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + C_2$$

Las constantes que hay que determinar son a , C_1 y C_2 .

$$\Phi_M = \Phi_N = 500 = C_1 \ln \sqrt{\frac{(x_2 - a)^2}{(x_2 + a)^2}} + C_2 = C_1 \ln \sqrt{\frac{(x_2 + 2R_2 - a)^2}{(x_2 + 2R_2 + a)^2}} + C_2$$

$$\Phi_P = \Phi_Q = 1.000 =$$

$$= C_1 \ln \sqrt{\frac{(-x_1 - 2R_1 - a)^2}{(-x_1 - 2R_1 + a)^2}} + C_2 = C_1 \ln \sqrt{\frac{(-x_1 - a)^2}{(-x_1 + a)^2}} + C_2$$

$$x_1 + x_2 = d - R_1 - R_2$$

Estas cinco ecuaciones contienen las cinco incógnitas x_1 , x_2 , C_1 , C_2 y a . Su solución es:

$$a = 5,124 \text{ cm} \qquad x_1 = 3,5 \text{ cm} \qquad x_2 = 2,5 \text{ cm}$$

$$C_1 = 182,5 \text{ volt}$$

$$C_2 = 695 \text{ volt}$$

El potencial es:

$$\Phi = 182,5 \ln \sqrt{\frac{(x-5,124)^2 + y^2}{(x+5,124)^2 + y^2}} + 695$$

★

4-25. Hallar la máxima diferencia de potencial aplicable entre dos cilindros de longitud infinita, excéntricos, de radios $R_1 = 4$ cm y $R_2 = 2\sqrt{10}$ cm, siendo la distancia entre los ejes $d = 2$ cm y teniendo aire como dieléctrico. Campo de ruptura del aire: 20 KV/cm.

Solución

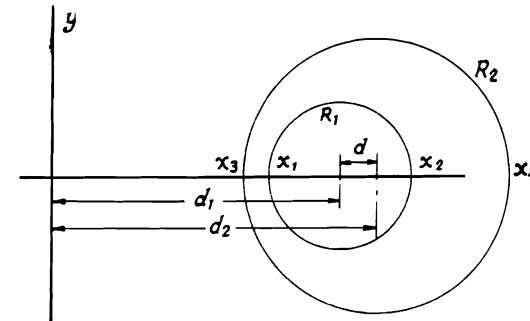


Fig. 4-52

Transformación

$$W = C_1 \ln \frac{Z-a}{Z+a} + C_2$$

$$\Phi = u = C_1 \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + C_2$$

Como lo único que interesa en este problema es la diferencia de potencial entre los cilindros, podemos poner $\Phi = 0$ en el punto $(0,0)$, con lo que $C_2 = 0$.

Además, por ser la superficie de cada cilindro equipotencial

$$\Phi_1 = \Phi_2, \Phi_3 = \Phi_4$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 \ln \sqrt{\frac{(x_1-a)^2}{(x_1+a)^2}} &= C_1 \ln \sqrt{\frac{(x_1+2R_1-a)^2}{(x_1+2R_1+a)^2}} \\ C_1 \ln \sqrt{\frac{(x_3-a)^2}{(x_3+a)^2}} &= C_1 \ln \sqrt{\frac{(x_3+2R_2-a)^2}{(x_3+2R_2+a)^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 = d_1 - R_1, x_3 = d_2 - R_2, d_1 = d_2 - d$$

Con estas cinco ecuaciones se determinan las cinco incógnitas:

$$a = 3 \text{ cm}, x_1 = 1 \text{ cm}, x_3 = 7 - 2\sqrt{10} \text{ cm}, d_1 = 5 \text{ cm}, d_2 = 7 \text{ cm}$$

Para determinar C_1

$$\Phi_3 - \Phi_1 = V_0$$

$$C_1 = 4,25 V_0$$

$$\Phi = 4,25 V_0 \ln \sqrt{\frac{(x-3)^2 + y^2}{(x+3)^2 + y^2}}$$

En la figura se aprecia que el campo máximo se producirá en algún punto del eje x de los comprendidos entre x_3 y x_1 .

$$E_x|_{y=0} = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{y=0} = - 4,25 V_0 \frac{6}{x^2-9} \text{ volt/cm}$$

Este valor se hace máximo cuando x^2-9 sea mínimo. Lo sería en $x = 3$ si este punto estuviera entre x_3 y x_1 .

$$\text{Para } x_1: x_1^2 - 9 = 1 - 9 = -8$$

$$\text{Para } x_3: x_3^2 - 9 = 30,75 > |-8|$$

Luego el campo máximo se produce en $x = x_1$ y vale

$$E_{m \acute{a}x} = 3,19 V_0 \text{ volt/cm.}$$

$$\text{Como } E_{m \acute{a}x} = 20 \text{ KV/cm}$$

$$20 \cdot 10^3 = 3,19 V_0$$

$$V_0 = 6,27 \text{ volt}$$

es la máxima diferencia de potencial aplicable entre los cilindros.

★

4-26. Hallar el potencial producido por dos cilindros indefinidos, de sección elíptica, homofocales, de semiejes a y b ($a > b$) el interior y a' y b' ($a' > b'$) el exterior, conectados a potenciales cero y V_0 respectivamente. Calcular la capacidad por unidad de longitud.

Solución

La transformación correspondiente es

$$W = C_1 \operatorname{arccos} KZ + jC_2$$

$$\frac{W - jC_2}{C_1} = \operatorname{arccos} KZ$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{K} \cos \left(\frac{W - jC_2}{C_1} \right) = \frac{1}{K} \left\{ \cos \frac{u}{C_1} \cos \left(j \frac{v - C_2}{C_1} \right) - \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sen} \left(j \frac{v - C_2}{C_1} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{K} \left\{ \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{v - C_2}{C_1} \right) - j \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{v - C_2}{C_1} \right) \right\} \\ &\begin{cases} x = \frac{1}{K} \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{v - C_2}{C_1} \right) \\ y = \frac{-1}{K} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{v - C_2}{C_1} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

de donde

$$\operatorname{sen}^2 \frac{u}{C_1} + \operatorname{cos}^2 \frac{u}{C_1} = \frac{K^2 x^2}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{v-C_2}{C_1} \right)} + \frac{K^2 y^2}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{v-C_2}{C_1} \right)} = 1 \quad (2)$$

Para $v = \text{constante}$, esta expresión es la ecuación de una elipse de semiejes

$$a = \frac{1}{K} \operatorname{ch} \left(\frac{v-C_2}{C_1} \right), \quad b = \frac{1}{K} \operatorname{sh} \left(\frac{v-C_2}{C_1} \right)$$

en la que se cumple

$$c^2 = a^2 - b^2 = \left(\frac{1}{K} \right)^2, \quad c = 1/K \quad (3)$$

luego todas las elipses de la familia son homofocales.

Así pues, la transformación se adapta a nuestro problema si ponemos $\Phi = v$.

Ahora hay que determinar las constantes. Ya tenemos $K = 1/c$. En la elipse interior, $\Phi = v = 0$.

$$x = \frac{1}{K} \operatorname{cos} \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right), \quad y = \frac{-1}{K} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right)$$

En el punto $(a, 0)$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{K} \operatorname{cos} \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) \\ 0 = \frac{1}{K} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) \end{cases}$$

De la última de estas dos ecuaciones se deduce que $u = 0$, y por lo tanto:

$$a = \frac{1}{K} \operatorname{ch} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) \quad (4)$$

En el punto $(a', 0)$ de la elipse exterior, $\Phi = V_0$,

$$a' = \frac{1}{K} \operatorname{cos} \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{V_0 - C_2}{C_1} \right) \quad 0 = \frac{-1}{K} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{V_0 - C_2}{C_1} \right)$$

de donde

$$a' = \frac{1}{K} \operatorname{ch} \left(\frac{V_0 - C_2}{C_1} \right) \quad (5)$$

De (4) y (5) se obtiene:

$$C_1 = \frac{V_0}{\operatorname{argch} Ka' - \operatorname{argch} Ka}, \quad C_2 = \frac{-V_0 \operatorname{argch} Ka}{\operatorname{argch} Ka' - \operatorname{argch} Ka} \quad (6)$$

También se pueden calcular las constantes empleando los puntos $(0, b)$ y $(0, b')$.

Elipse $\Phi = 0$, punto $(0, b)$

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{K} \operatorname{cos} \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) \\ b = \frac{-1}{K} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) \end{cases}$$

De la primera de estas ecuaciones se obtiene que $u/C_1 = \pi/2$ y de la segunda:

$$b = \frac{1}{K} \operatorname{sh} \left(\frac{C_2}{C_1} \right), \quad C_2/C_1 = \operatorname{argsh} Kb \quad (7)$$

Elipse $\Phi = V_0$, punto $(0, b')$: análogamente se obtiene:

$$\frac{V_0 - C_2}{C_1} = \operatorname{argsh} (-b'K) \quad (8)$$

De (7) y (8)

$$C_1 = \frac{V_0}{\operatorname{argsh} Kb - \operatorname{argsh} Kb'}, \quad C_2 = \frac{V_0 \operatorname{argsh} Kb}{\operatorname{argsh} Kb - \operatorname{argsh} Kb'} \quad (9)$$

Ahora que hemos determinado las constantes ya podemos poner la ecuación de las líneas equipotenciales

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \left\{ \frac{\Phi}{V_0} \left(\operatorname{argsh} \frac{b}{c} - \operatorname{argsh} \frac{b'}{c} \right) - \operatorname{argsh} \frac{b}{c} \right\}} +$$

$$+ \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \left\{ \frac{\Phi}{V_0} \left(\operatorname{argsh} \frac{b}{c} - \operatorname{argsh} \frac{b'}{c} \right) - \operatorname{argsh} \frac{b}{c} \right\}} = 1$$

Para calcular la capacidad calculemos primero el flujo que atraviesa el cilindro interior mediante la fórmula,

$$\psi_D = \epsilon (u_2 - u_1) \quad (10)$$

Si u_2 es el transformado de $(-a, 0)$ y u_1 el de $(a, 0)$, $\psi_D = \epsilon (u_2 - u_1)$ es el flujo que atraviesa la mitad superior de la elipse. Por simetría con respecto al eje x , el flujo total será $2\psi_D$.

$$\psi_T = 2\psi_D = 2\epsilon (u_2 - u_1)$$

Punto 1: $(a, 0)$, $\Phi = 0$

$$\begin{cases} a = c \cos \frac{u_1}{C_1} \operatorname{ch} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) \\ 0 = c \operatorname{sen} \frac{u_1}{C_1} \operatorname{sh} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) \end{cases}$$

de donde

$$u_1 = C_1 \operatorname{arccos} \left\{ \frac{a}{c \operatorname{ch} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right)} \right\}$$

Análogamente

$$u_2 = C_1 \operatorname{arccos} \left\{ \frac{a}{c \operatorname{ch} \left(-\frac{C_2}{C_1} \right)} \right\} - C_1 \pi$$

$$u_2 - u_1 = -C_1 \pi$$

$$\psi_T = -2\pi \epsilon C_1$$

Según el teorema de Gauss y por no haber flujo hacia el interior del metal, este flujo ψ_T ha de ser igual a la carga (por unidad de longitud) de la elipse

interior.

Capacidad:

$$\operatorname{Cap} = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{2\pi\epsilon}{\left| \operatorname{argsh} \frac{b}{c} - \operatorname{argsh} \frac{b'}{c} \right|} \quad \text{Ej. 11}$$

Ahora vamos a repetir el problema sin poner las constantes C_1 y C_2 en la fórmula de la transformación.

$$W = \operatorname{arccos} Z$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{K} \cos u \operatorname{ch} v \\ y = \frac{-1}{K} \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases}$$

$$\frac{K^2 x^2}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{K^2 y^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1 \quad (12)$$

Esta ecuación es una familia de elipses de semejez

$$a = \frac{\operatorname{ch} v}{K}, \quad b = \frac{\operatorname{sh} v}{K}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1/K^2, \quad c = 1/K$$

En la expresión (12) vemos que a todos los puntos de una elipse le corresponde el mismo valor de v , es decir, que la elipse se transformará en un segmento paralelo al eje u .

Punto $(a, 0)$

$$\begin{cases} a = c \cos u \operatorname{ch} v \\ 0 = -c \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} a = c \cos u \operatorname{ch} v \\ 0 = -c \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases} \quad (14)$$

Observemos que para todos los vértices $(a, 0)$ de las distintas elipses se puede poner la misma relación (14), y como cada elipse se caracteriza por un valor distinto de v , está claro que de (14) no se puede deducir $\operatorname{sh} v = 0$ sino $\operatorname{sen} u = 0$.

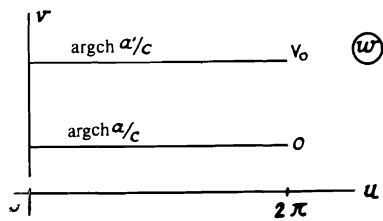
$$u = 0, \quad \cos u = 1, \quad a = c \operatorname{ch} v, \quad v = \operatorname{argch} (a/c)$$

Por otra parte, en esta elipse $y = -c \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v$,

$$\operatorname{sh} v = \sqrt{\operatorname{ch}^2 v - 1} = \sqrt{(a^2/c^2) - 1} = b/c, \quad \text{resultando } y = -b \operatorname{sen} u$$

Pero y debe variar entre $-b$ y b y tomar dos veces cada valor, luego $\operatorname{sen} u$ ha de variar entre $+1$ y -1 y tomar dos veces cada valor, para lo que se requiere que $0 < u < 2\pi$.

Análogamente se obtiene para la elipse V_0 que $v = \operatorname{argch} (a'/c)$ y $0 < u < 2\pi$.



En el plano W tenemos ahora un condensador plano en el que despreciamos el efecto de borde.

$$\Phi = C_1 v + C_2$$

Fig. 4-53

$$\begin{cases} V_0 = C_1 \operatorname{argch} (a'/c) + C_2 \\ 0 = C_1 \operatorname{argch} (a/c) + C_2 \end{cases}$$

de donde

$$C_1 = \frac{V_0}{\operatorname{argch} \frac{a'}{c} - \operatorname{argch} \frac{a}{c}}, \quad C_2 = \frac{-V_0 \operatorname{argch} \frac{a}{c}}{\operatorname{argch} \frac{a'}{c} - \operatorname{argch} \frac{a}{c}}$$

$$v = \frac{\Phi - C_2}{C_1}$$

Estos valores de C_1 y C_2 son los mismos que obtuvimos antes, y junto con

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right)} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right)} = 1$$

dan las mismas superficies equipotenciales.

La capacidad se calcula mucho más fácilmente en el plano W .

$$\operatorname{Cap} = \epsilon \frac{S}{d} = \frac{2\pi\epsilon}{\operatorname{argch} \frac{a'}{c} - \operatorname{argch} \frac{a}{c}}$$

★

4-27. Considérese un plano conductor indefinido en dirección normal al cual se aproxima un semiplano conductor indefinido hasta una distancia d . Se aplica una diferencia de potencial de V_0 volt. Hallar a) la función potencial y b) el campo máximo en la superficie del plano.

Solución

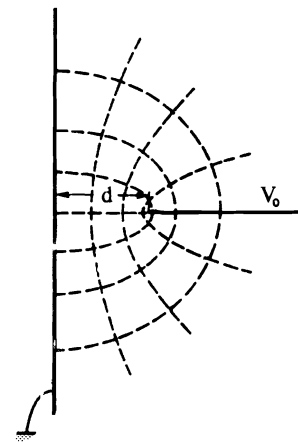


Fig. 4-54

a) Las superficies del plano y del semiplano pueden considerarse hipérbolas degeneradas, como vamos a ver.

$$W = \operatorname{arcos} KZ$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{K} \cos u \operatorname{ch} v \\ y = -\frac{1}{K} \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases}$$

Eliminando v se obtiene

$$\frac{K^2 x^2}{\cos^2 u} - \frac{K^2 y^2}{\operatorname{sen}^2 u} = 1$$

que es la ecuación de una familia de hipérbolas

$$a^2 + b^2 = d^2, \quad K = 1/d$$

Vamos a ver en qué se transforman las hipérbolas degeneradas

Vertical: $x = 0, y = y$

$$\begin{cases} 0 = d \cos u \operatorname{ch} v \\ y = -d \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases}$$

de donde $\cos u = 0$, $u = \pi/2$

$y = -d \operatorname{sh} v$ y como $-\infty < y < \infty$, será $-\infty < v < \infty$

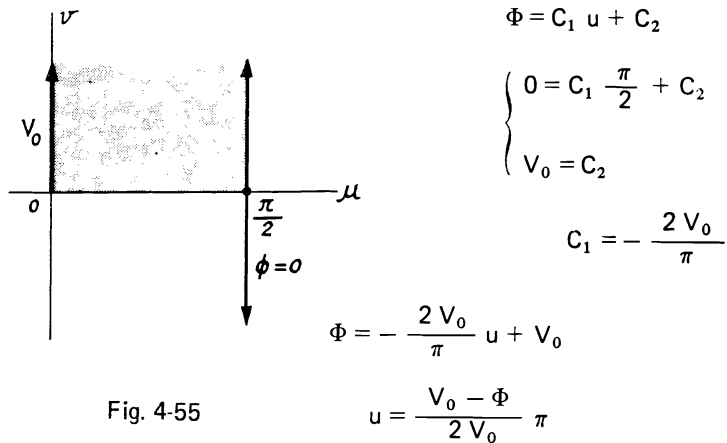
Horizontal $x = x$, $y = 0$, $x \geq d$

$$\begin{cases} x = d \cos u \operatorname{ch} v \\ 0 = -d \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases}$$

de donde $\operatorname{sen} u = 0$, $u = 0$.

$x = d \operatorname{ch} v$ y como $d \leq x < \infty$, tendrá que ser $0 < v < \infty$

El recinto transformado es el de la figura 4-55. Considerando el condensador sombreado y despreciando el efecto de borde



$$\Phi = C_1 u + C_2$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 \frac{\pi}{2} + C_2 \\ V_0 = C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = -\frac{2V_0}{\pi}$$

$$\Phi = -\frac{2V_0}{\pi} u + V_0$$

$$u = \frac{V_0 - \Phi}{2V_0} \pi$$

Hipérbolas equipotenciales

$$\frac{x^2}{d^2 \cos^2 \left(\pi \frac{V_0 - \Phi}{2V_0} \right)} - \frac{y^2}{d^2 \operatorname{sen}^2 \left(\pi \frac{V_0 - \Phi}{2V_0} \right)} = 1$$

b) En el plano vertical el campo sólo tiene componente E_x

$$E_x = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{d \Phi}{d x} \right|_{dy=0}$$

$$d \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

Diferenciando las expresiones

$$\begin{cases} x = d \cos \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{ch} \frac{v}{C_1} \\ y = -d \operatorname{sen} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1} \end{cases}$$

$$dx = \frac{d}{C_1} \left\{ \cos \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1} dv - \operatorname{sen} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1} \right\} d\Phi \quad (1)$$

$$dy = 0 = - \frac{d}{C_1} \left\{ \cos \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1} d\Phi + \operatorname{sen} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1} \right\} dv \quad (2)$$

De (2) se despeja dv , que sustituido en (1) da

$$dx = - \frac{d}{C_1} \left\{ \frac{\cos^2 \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{sh}^2 \frac{v}{C_1} + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{ch}^2 \frac{v}{C_1}}{\operatorname{sen} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) \operatorname{ch} \frac{v}{C_1}} \right\} d\Phi$$

Para $x = 0$ resulta $\Phi = 0$ y $\frac{\Phi - C_2}{C_1} = \frac{\pi}{2}$

$$dx = - \frac{d}{C_1} \operatorname{ch} \frac{v}{C_1} d\Phi$$

$$E_x |_{x=0} = \frac{C_1}{d \operatorname{ch} \frac{v}{C_1}} = \frac{C_1}{d^2 + y^2}$$

El valor máximo de este campo ocurre en $y = 0$

$$E_x \Big|_{x=0, \text{ m.áx.}} = \frac{C_1}{d} = -\frac{2 V_0}{\pi d}$$

★

4-28. Determinar el potencial creado por un cilindro conductor de sección elíptica de semiejes a y b ($a > b$), conectado a V_0 voltios, en cuyo interior hay una cinta metálica a cero voltios, alojada en el plano del eje mayor de la elipse, de anchura $2c$ ($c^2 = a^2 - b^2$). Hallar la capacidad por unidad de longitud del condensador así formado.

Solución

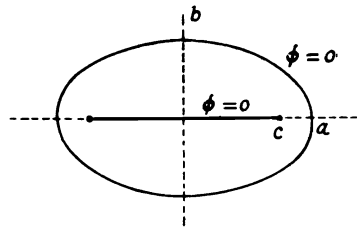


Fig. 4-56

Aplicando una transformación trigonométrica

$$\begin{cases} x = \frac{1}{K} \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{v-C_2}{C_1} \right) \\ y = -\frac{1}{K} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{v-C_2}{C_1} \right) \end{cases}$$

Como se ha visto en problemas anteriores, $K = 1/c$ y $\Phi = v$

La traza de la cinta metálica, definida en Z por $y = 0$, $x = x$, $-c < x < +c$, se transforma en

$$\begin{cases} x = c \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{-C_2}{C_1} \right) \\ 0 = -c \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{-C_2}{C_1} \right) \end{cases}$$

de donde $C_2 = 0$ y

$$x = c \cos \frac{u}{C_1}$$

Como x tiene que variar entre $-c$ y $+c$, tiene que ser:

$$-1 < \cos \frac{u}{C_1} < +1$$

En el punto $(a, 0)$ de la elipse V_0

$$\begin{cases} a = c \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{V_0 - C_2}{C_1} \right) = c \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \frac{V_0}{C_1} \\ 0 = -c \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \frac{V_0}{C_1} \end{cases}$$

de la última ecuación se deduce que $u = 0$, $\cos(u/C_1) = 1$ y

$$a = c \operatorname{ch} \frac{V_0}{C_1}, \quad V_0 = C_1 \operatorname{arg} \operatorname{ch} (a/c)$$

de donde:
$$C_1 = \frac{V_0}{\operatorname{arg} \operatorname{ch} (a/c)}$$

Superficies equipotenciales:

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 (\Phi/C_1)} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 (\Phi/C_1)} = 1$$

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\Phi}{V_0} \operatorname{arg} \operatorname{ch} \frac{a}{c} \right)} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\Phi}{V_0} \operatorname{arg} \operatorname{sh} \frac{a}{c} \right)} = 1$$

Capacidad: la cinta metálica, por muy delgada que sea, tendrá dos caras y habrá flujo de \vec{D} a través de las dos. El flujo a través de la cara superior es:

$$\psi_D = \epsilon (u_2 - u_1)$$

u_2 es el transformado del punto $(-c, 0)$

$$\begin{cases} -c = c \cos \frac{u_2}{C_1} \\ 0 = -c \operatorname{sen} \frac{u_2}{C_1} \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

De la primera se obtiene $\cos(u_2/C_1) = -1$, $u_2 = \pi C_1$

u_1 es el transformado de $(c, 0)$

$$c = c \cos \frac{u_1}{C_1}, \quad \cos \frac{u_1}{C_1} = 1, \quad u_1 = 0$$

$$\psi_D = \epsilon C_1 \pi, \quad \psi_T = 2 \psi_D = 2 \pi \epsilon C_1 = Q$$

$$Cap = \frac{|Q|}{|V_0|} = \frac{2 \pi \epsilon}{|\arg \operatorname{ch} (a/c)|}$$

Nótese que las expresiones de las líneas equipotenciales y de la capacidad pueden obtenerse también como caso particular de las obtenidas en el problema 4-26.

★

4-29. Se tienen dos cintas indefinidas planas paralelas, de espesor despreciable, cuyas trazas en el plano (x, y) son los segmentos $a < x < (a + d)$ y $-(a + d) < x < -a$. Despreciando el efecto de los bordes exteriores, calcular la capacidad por unidad de longitud.

Solución

Las semirectas $x \geq a$ y $x \leq -a$ pueden considerarse hipérbolas degeneradas de la familia:

$$\begin{cases} x = a \cos u \operatorname{ch} v \\ y = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases}$$

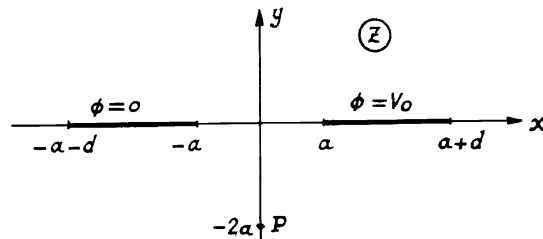


Fig. 4-57

donde u es el parámetro de la familia y v se elimina fácilmente.

Como sabemos, los segmentos del plano Z , que pertenecen a esas hipérbolas degeneradas, se transforman en segmentos paralelos al eje v ($u = \text{constante}$).

Punto $(a, 0)$

$$\begin{cases} a = a \cos u \operatorname{ch} v \\ 0 = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases}$$

de donde $u = 0, v = 0$

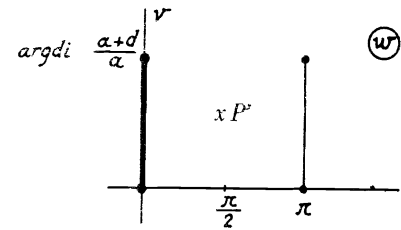


Fig. 4-58

$$\begin{cases} -a = a \cos u \operatorname{ch} v \\ 0 = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sh} v \end{cases} \Rightarrow u = \pi, v = 0$$

Punto $[-(a + d), 0]$: sigue siendo $u = \pi$ y $v = \arg \operatorname{ch} \frac{a + d}{a}$

Punto $(a + d, 0)$: como pertenece a la misma hipérbola, será también:

$$u = 0$$

$$a + d = a \operatorname{ch} v, v = \arg \operatorname{ch} \frac{a + d}{a}$$

Punto $(-a, 0)$

En el plano W sólo vemos un condensador (plano); pero en el plano Z había dos condensadores: uno formado por las caras superiores de los segmentos y el semiplano $y > 0$ y otro formado por las caras inferiores y el semiplano $y < 0$. Veamos a cuál de los dos corresponde el transformado en W . Para averiguarlo, hallamos el transformado inverso del punto $P' \left(\frac{\pi}{2}, \arg \operatorname{sh} 2 \right)$. Hemos puesto $u_p = \frac{\pi}{2}$ para que de $x_p = 0$ y $v_p = \arg \operatorname{sh} 2 > 0$ para estar seguros de que P' está entre las placas del condensador de W . El transformado inverso, P , es:

$$x = 0, y = -a \cdot 1 \cdot \operatorname{sh} (\arg \operatorname{sh} 2) = -2a$$

Luego, como se ve en la figura 4-58, el condensador de W corresponde al condensador $y < 0$ del plano Z .

Sin embargo, no era necesario saber esto, y bastaba con poner que la capacidad es el doble de la del condensador de W .

$$Cap = \epsilon \frac{S}{d} = \frac{2 \epsilon}{\pi} \left| \arg \operatorname{ch} \frac{a + d}{a} \right|$$

Vamos a repetir el problema poniendo las constantes en la expresión de la transformación.

$$x = a \cos \left(\frac{u - C_2}{C_1} \right) \operatorname{ch} \frac{v}{C_1} \quad y = -a \operatorname{sen} \left(\frac{u - C_2}{C_1} \right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1}$$

Segmento $\Phi = 0 : y = 0, x < -a$

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{-C_2}{C_1}\right) \operatorname{ch} \frac{v}{C_1} \\ 0 = -a \operatorname{sen}\left(\frac{-C_2}{C_1}\right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1} \end{cases}$$

de la segunda ecuación se deduce $\operatorname{sen}\left(\frac{-C_2}{C_1}\right) = 0, -\frac{C_2}{C_1} = \pi$

Segmento $\Phi = V_0 : y = 0, x > +a$

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{V_0 - C_2}{C_1}\right) \operatorname{ch} \frac{v}{C_1} \\ 0 = -a \operatorname{sen}\left(\frac{V_0 - C_2}{C_1}\right) \operatorname{sh} \frac{v}{C_1} \end{cases}$$

de la segunda ecuación: $\operatorname{sen}\left(\frac{V_0 - C_2}{C_1}\right) = 0, \frac{V_0 - C_2}{C_1} = 0$

$$V_0 = C_2 = -C_1$$

de donde $C_2 = V_0, C_1 = -V_0/\pi$

Flujo en la cara superior del segmento $\Phi = 0$

$$\psi_D = -\epsilon (v_2 - v_1)$$

v_2 es el transformado de $(-(a+d), 0)$

$$-(a+d) = -a \operatorname{ch} \frac{v_2}{C_1}$$

$$v_2 = C_1 \operatorname{argch} \frac{a+d}{a}$$

v_1 es el transformado de $(-a, 0)$

$$-a = -a \operatorname{ch} \frac{v_1}{C_1}, v_1 = 0$$

$$\psi_D = -\epsilon v_2 = -\epsilon C_1 \operatorname{argch} \frac{a+d}{a}$$

$$\psi_T = Q = 2 \psi_D = \frac{2V_0\epsilon}{\pi} \operatorname{argch} \frac{a+d}{a}$$

$$\operatorname{Cap} = \frac{|Q|}{|V_0|} = \frac{2\epsilon}{\pi} \left[\operatorname{argch} \frac{a+d}{a} \right]$$

★

4-30. Un hilo conductor, rectilíneo, indefinido, cargado uniformemente con λ coul/m, está frente a un cilindro conductor indefinido cuya sección recta es una elipse de semiejes a y b , de forma que la traza del hilo está en la prolongación del eje mayor de la elipse, a una distancia d ($d > a$) del centro. Sabiendo que el cilindro se mantiene a potencial V_0 y que el potencial en el punto donde se va a poner el hilo es V_1 , calcular la fuerza que se ejerce sobre el hilo por unidad de longitud.

Solución

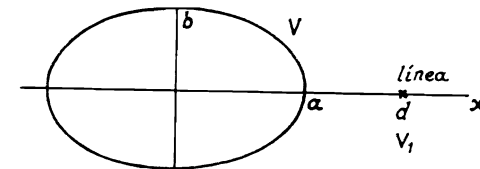


Fig. 4-59

$$\begin{cases} x = c \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{v - C_2}{C_1} \right) \\ y = -c \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{v - C_2}{C_1} \right) \end{cases}$$

Punto $(a, 0), \Phi = V_0$

$$\begin{cases} a = c \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{V_0 - C_2}{C_1} \right) \\ 0 = -c \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{V_0 - C_2}{C_1} \right) \end{cases}$$

de donde $u = 0$, $\frac{V_0 - C_2}{C_1} = \operatorname{argch} \frac{a}{c}$

Análogamente,

$$\frac{V_1 - C_2}{C_1} = \operatorname{argch} \frac{d}{c}$$

$$C_1 = \frac{V_1 - V_0}{\operatorname{argch} \frac{d}{c} - \operatorname{argch} \frac{a}{c}}$$

$$C_2 = \frac{V_0 \operatorname{argch} \frac{d}{c} - V_1 \operatorname{argch} \frac{a}{c}}{\operatorname{argch} \frac{d}{c} - \operatorname{argch} \frac{a}{c}}$$

El campo en $(d, 0)$ sólo tiene componente E_x

$$E_x = - \left. \frac{d\Phi}{dx} \right]_{dy=0}$$

$$dx = -\frac{c}{C_1} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) du + \frac{c}{C_1} \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) d\Phi$$

$$dy = 0 = -\frac{c}{C_1} \cos \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) du + \frac{c}{C_1} \operatorname{sen} \frac{u}{C_1} \operatorname{ch} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) d\Phi$$

de donde

$$E_x = -\frac{C_1}{c} \left\{ \frac{\cos \frac{u}{C_1} \operatorname{sh} \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right)}{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{C_1} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right) + \cos^2 \frac{u}{C_1} \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\Phi - C_2}{C_1} \right)} \right\}$$

$$E_x \Big|_{y=0, x=d} = -\frac{C_1}{\sqrt{d^2 - c^2}} = -\frac{V_0 - V_1}{\sqrt{d^2 - c^2} \left(\operatorname{argch} \frac{d}{c} - \operatorname{argch} \frac{a}{c} \right)}$$

La fuerza ejercida sobre la línea por unidad de longitud es

$$F = \lambda E_x \Big|_{y=0, x=d} = \frac{(V_0 - V_1)}{\sqrt{d^2 - c^2} \left(\operatorname{argch} \frac{d}{c} - \operatorname{argch} \frac{a}{c} \right)}$$

dirigida en la dirección y sentido de \vec{u}_x .

**

El siguiente problema es extremadamente interesante puesto que, admitiendo tantos métodos de resolución, permite entrever la gran utilidad del método de transformación conforme en la determinación del potencial en problemas bidimensionales. Por otra parte, no son los que van a exponerse a continuación los únicos métodos por los que el problema es resoluble. En el capítulo siguiente se hará una aplicación del método de soluciones en forma de producto a este mismo problema.

★

4.31.- Un contorno de forma cilíndrica está constituido por dos semicilindros indefinidos de radio a , el inferior a potencial $-V_0$ y el superior a V_0 . Determinar la función potencial suponiendo muy pequeña la separación entre los conductores.

Solución

1^{er} método

Aplicando una inversión

$$W = 1/Z = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$$

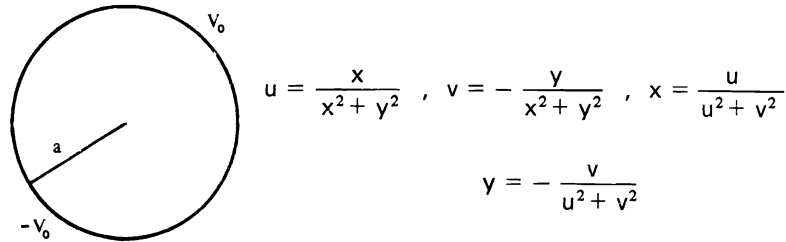


Fig. 4-60

Situamos los ejes de coordenadas en el plano Z como se indica en la figura 4-61 para conseguir que las dos semicircunferencias se transformen en semirectas paralelas al eje v .

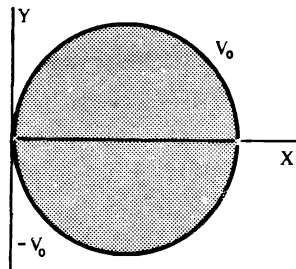


Fig. 4-61

La circunferencia del plano Z tiene la ecuación:

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

Aplicándole la transformación resulta:

$$u = 1/2a$$

El punto $(2a,0)$ se transforma en el $(\frac{1}{2a}, 0)$

y el punto $(0,0)$ se transforma en los puntos del infinito de la recta $u = \frac{1}{2a}$

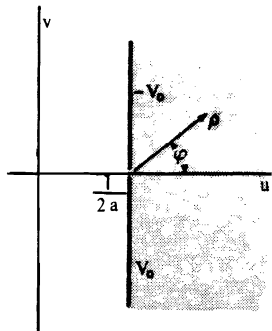


Fig. 4-62

A los valores positivos de y corresponden valores negativos de v , por lo que los potenciales en la recta transformada son los indicados en la figura 4-62.

Veamos en cuál de los dos semiplanos definidos en W por la recta $u = 1/2a$ se transforma el interior de la circunferencia. Transformamos el punto $(a,0)$ que da $u = 1/a > 1/2a$ y $v = 0$,

luego el círculo se transforma en el semiplano $u > 1/2a$.

A partir de aquí se pueden seguir, entre otros, los dos caminos que vamos a exponer:

a) Aplicamos una nueva transformación del plano W al $W'(\rho, \varphi)$.

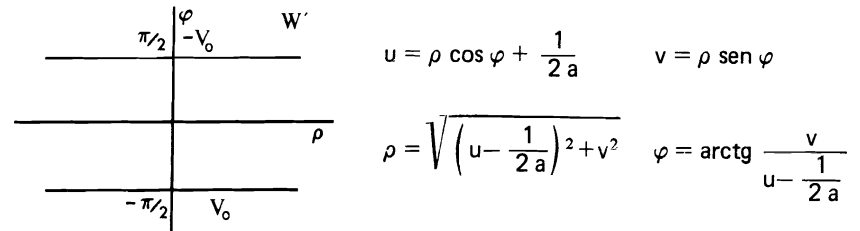


Fig. 4-63

La semirrecta superior de W pasa a la recta $\varphi = \pi/2$ y la inferior a $\varphi = -\pi/2$. El potencial en el plano W' es:

$$\Phi = A\varphi + B$$

al que se le imponen las condiciones

$$\begin{cases} -V_0 = A \frac{\pi}{2} + B \\ V_0 = -A \frac{\pi}{2} + B \end{cases}$$

de donde $B = 0$, $A = -\frac{2V_0}{\pi}$, $\Phi = -\frac{2V_0}{\pi} \varphi$

Volviendo al plano W

$$\Phi = -\frac{2V_0}{\pi} \arctg \frac{2av}{2au - 1}$$

y volviendo al plano Z

$$\Phi = -\frac{2V_0}{\pi} \arctg \frac{2ay}{x^2 + y^2 - 2ax}$$

b) Pasamos del plano W al W' mediante la transformación

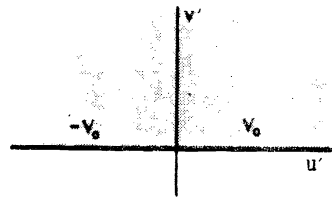


Fig. 4-64

semiplano (4.22).

$$\begin{aligned} \Phi(u', v') &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v' G(\eta) d\eta}{v'^2 + (u' - \eta)^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{v'(-V_0) d\eta}{v'^2 + (u' - \eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v'(V_0) d\eta}{v'^2 + (u' - \eta)^2} = \\ &= V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{v'}{u'} \right) \end{aligned}$$

Volviendo al plano W

$$\Phi = \frac{2V_0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{u - (1/2a)}{-v} \right)$$

y en el plano Z

$$\Phi = \frac{2V_0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{x^2 + y^2 - 2ax}{2ay} \right) = -\frac{2V_0}{\pi} \arctg \frac{2ay}{x^2 + y^2 - 2ax}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$-\arctg \frac{n}{m} = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{m}{n}$$

2º método

Aplicando una transformación bilineal

$$Z = a e^{j\varphi} \frac{W - \gamma}{W - \gamma^*}$$

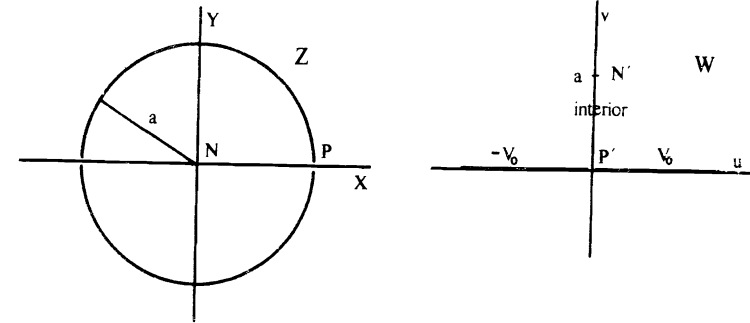


Fig. 4-65

Podemos elegir las constantes indeterminadas φ y γ para que la circunferencia de Z se transforme en el eje u. Sabemos de antemano que la transformación bilineal va a transformar el círculo en una recta paralela al eje u. Para fijar su posición en el lugar deseado basta con hacer que P' sea el transformado de P. Para determinar la otra constante se le impone a la transformación una condición arbitraria; por ejemplo, que el centro de la circunferencia se transforme en el punto (0,a) de W.

1ª condición P \rightarrow P'

$$a + j0 = a e^{j\varphi} \frac{0 - \gamma}{0 - \gamma^*} = a e^{j\varphi} \frac{r e^{j\delta}}{r e^{-j\delta}} = a e^{j(\varphi + 2\delta)}$$

$$e^{j(\varphi + 2\delta)} = 1, \varphi + 2\delta = 0$$

donde hemos puesto γ en forma módulo - argumental

2ª condición N \rightarrow N'. Poniendo γ en la forma $\gamma = \alpha + j\beta$

$$0 + j0 = a e^{j\varphi} \frac{j\alpha - (\gamma + j\beta)}{j\alpha - (\alpha - j\beta)}, \quad j\alpha - (\alpha + j\beta) = 0$$

para lo que se requiere que $\alpha = 0$ y $a = \beta$

luego $\gamma = r e^{j\varphi} = ja$, $r = a$, $\delta = \pi/2$, $\varphi = -\pi$

Finalmente, la expresión de la transformación es:

$$Z = a e^{-j\pi} \frac{W - ja}{W + ja} = a \frac{ja - W}{ja + W}$$

Poniendo:

$$Z = x + jy, \quad W = u + jv$$

se puede despejar:

$$u = \frac{2ya^2}{(x+a)^2 + y^2}, \quad v = \frac{a^2 - y^2 - x^2}{(x+a)^2 + y^2}$$

La circunferencia, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = a^2$, se transforma, como deseábamos, en la recta $v = 0$. Cuando $y > 0$ también es $u > 0$ y las condiciones de contorno quedan como se indica en la figura 4-65.

La situación en la figura 4-65 es la misma a la que habíamos llegado por el método 1° (fig. 4-64).

3er Método. Por aplicación de la fórmula (4.21) de Dirichlet para el círculo.

$$\Phi(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} (a^2 - r^2) \int_0^{2\pi} \frac{F(\theta) d\theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\Theta - \theta)}$$

En este caso:

$$F(\theta) = \begin{cases} V_0, & 0 < \theta < \pi \\ -V_0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{V_0 d\theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\Theta - \theta)} + \right. \\ & \left. + \int_\pi^{2\pi} \frac{(-V_0) d\theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\Theta - \theta)} \right\} \quad [1] \end{aligned}$$

Llamemos:

$$I = \int \frac{d\theta}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\Theta - \theta)}$$

Haciendo el cambio:

$$\begin{aligned} \Theta - \theta &= \varphi \\ I &= -A \int \frac{d\varphi}{1 + B \cos \varphi} \end{aligned}$$

$$\text{donde } A = \frac{1}{a^2 + r^2} \quad \text{y} \quad B = -\frac{2ar}{a^2 + r^2}$$

Hacemos $\text{tg} \frac{\varphi}{2} = t$ y obtenemos:

$$I = -\frac{-2A}{\sqrt{1-B^2}} \text{arc tg} \left(\sqrt{\frac{1-B}{1+B}} t \right)$$

Deshaciendo los cambios de variable y restituyendo los valores de A y B :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{a^2 - r^2} \text{arc tg} \left[\frac{a+r}{a-r} \text{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right] \\ \Phi &= \frac{V_0 (a^2 - r^2)}{2\pi} \frac{(-2)}{a^2 - r^2} \left\{ \text{arc tg} \left[\frac{a+r}{a-r} \text{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right]_0^\pi - \right. \\ & \left. - \text{arc tg} \left[\frac{a+r}{a-r} \text{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right]_\pi^{2\pi} \right\} = -\frac{V_0}{\pi} \left\{ \text{arc tg} \left[\frac{a+r}{a-r} \text{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right]_0^\pi - \right. \\ & \left. - \text{arc tg} \left[\frac{a+r}{a-r} \text{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right]_\pi^{2\pi} \right\} \end{aligned}$$

Como θ recorre todos los valores entre 0 y 2π , para algún valor de θ será $\Theta = \theta + \pi$. Entonces $\Theta - \theta = \pi$ y $\frac{(\Theta - \theta)}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\text{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} = \pm \infty$

En ese valor de Φ la tangente pasa de $+\infty$ a $-\infty$. Esto ocurrirá una sola vez en $0 < \theta < 2\pi$ y vamos a suponer que ocurre en $0 < \theta < \pi$.

Haciendo:

$$\frac{a+r}{a-r} = N$$

$$\begin{aligned} \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right]_{\theta}^{\pi} &= \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right]_{\theta}^{\Theta - \pi - \epsilon} + \\ &+ \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - \theta}{2} \right]_{\Theta - \pi + \epsilon}^{\pi} = \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\pi + \epsilon}{2} \right] - \\ &- \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right] + \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - \pi}{2} \right] - \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\pi - \epsilon}{2} \right] \\ \Phi &= -\frac{V_0}{\pi} \left\{ \arctan (-\infty) - \arctan \left[N \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right] + 2 \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - \pi}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \arctan (+\infty) - \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - 2\pi}{2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Poniendo: } \arctan (-\infty) = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \arctan (+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi = -\frac{V_0}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{2} - \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right] + 2 \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - \pi}{2} \right] - \frac{\pi}{2} - \right. \\ \left. - \arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta - 2\pi}{2} \right] \right\}$$

y teniendo en cuenta:

$$-\arctan \frac{n}{m} = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{m}{n}$$

$$\Phi = \frac{2V_0}{\pi} \left\{ -\arctan \left[N \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right] + \arctan \left[\frac{1}{N} \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right] \right\} = -\frac{2V_0}{\pi} (-\xi + \xi)$$

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{\Phi\pi}{2V_0} \right) = \operatorname{tg} (\xi - \xi) = \frac{\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \xi}{1 + \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \xi} = \operatorname{sen} \Theta \frac{2ar}{r^2 - a^2}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{2V_0}{\pi} \arctan \left[\frac{2ar}{r^2 - a^2} \operatorname{sen} \Theta \right] = -\frac{2V_0}{\pi} \arctan \left[\frac{2ar}{r^2 - a^2} \frac{y}{r} \right] = \\ &= -\frac{2V_0}{\pi} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \end{aligned}$$

★

SUPERPOSICION

4-32 Hállese el potencial en los alrededores de una esfera que se introduce en el seno de un campo eléctrico uniforme y continuo $\vec{E}(r) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0$, en los siguientes casos:

- a) Esfera conectada a potencial cero. b) Esfera conectada a potencial V_0 .
c) Esfera cargada con Q .

Solución

a) Supongamos que el campo \vec{E}_0 , antes de colocar la esfera, estuviera dirigido en la dirección del eje z . El potencial sería:

$$\Phi = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$

donde θ es el ángulo que forman el vector de posición \vec{r} y el campo, no siendo ya necesaria la restricción de que \vec{E}_0 tenga la dirección del eje z . En los puntos que luego va a ocupar la superficie esférica el potencial será:

$$\Phi_1(r)_s = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} = -E_0 R \cos \theta$$

Necesitamos encontrar una función potencial Φ_2 tal que superpuesta a Φ_1 sea capaz de satisfacer la condición de contorno. Esa función ha de cumplir:

$$\Phi_1(x, y, z)_s + \Phi_2(x, y, z)_s = 0 \quad [1]$$

Ensayemos:

$$\Phi_2 = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}$$

Sustituyendo [1]:

$$-\vec{E}_0 \cdot \vec{R} + \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon R^3} = 0, \quad \left(-\vec{E}_0 + \frac{\vec{m}}{4\pi\epsilon R^2} \right) \cdot \vec{R} = 0$$

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{m}}{4\pi\epsilon R^3}, \quad \vec{m} = 4\pi\epsilon R^3 \vec{E}_0$$

$$\Phi_2 = \frac{R^3}{r^3} \vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right)$$

El campo eléctrico será:

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi = -\text{grad} \left\{ -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(\frac{R^3}{r^3} \right) \right\} =$$

$$= -\text{grad } \Phi_1 - \text{grad} \left\{ (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \frac{R^3}{r^3} \right\} = \vec{E}_0 - \text{grad} \left\{ (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(\frac{R^3}{r^3} \right) \right\} =$$

$$= \vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \text{grad} \left(\frac{R^3}{r^3} \right) - \frac{R^3}{r^2} \text{grad} (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) =$$

$$= \vec{E}_0 - (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) R^3 \left(\frac{-3}{r^4} \right) \vec{u}_r - \frac{R^3}{r^3} \vec{E}_0$$

En la superficie de la esfera

$$\vec{E}]_s = \vec{E}]_{r=R} = 3 E_0 \cos \theta \vec{u}_r$$

Aplicando las condiciones de contorno al campo \vec{D}

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \rho_s = \vec{u}_r \cdot \epsilon \vec{E}_1 = \vec{u}_r \cdot 3 \epsilon E_0 \cos \theta \vec{u}_r = 3 \epsilon E_0 \cos \theta$$

qué es la densidad de carga inducida en la esfera. La carga total sobre la esfera será:

$$Q = \oint_s \rho_s ds = \int_0^\pi 3 \epsilon E_0 \cos \theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = 0$$

b) A la solución Φ obtenida en el apartado anterior hay que sumarle una función Φ_3 tal que $\Phi + \Phi_3$ particularizado para los puntos de la superficie de la esfera dé V_0 . Esta función Φ_3 puede ser

$$\Phi_3 = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon r}$$

$$\Phi_1]_s + \Phi_3]_s = \Phi_3]_s = V_0 = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon R}$$

$$Q_0 = 4\pi \epsilon R V_0$$

$$\Phi_3 = \frac{R}{r} V_0$$

c) También es válido aquí el resultado del caso a) si se le suma una función Φ_3 tal que la nueva solución dé carga Q sobre la esfera:

$$\Phi_3 = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$$

$$\Phi = (\vec{E}_0 \cdot \vec{r}) \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$$

Se comprueba que

$$\rho_s = 3 E_0 \cos \theta + \frac{Q}{4\pi \epsilon R}$$

y que la carga total sobre la esfera es Q .

★

4-33. Hállese el potencial en el centro de un cubo cuyas caras están todas a potencial cero excepto una, que tiene potencial V_0 .

Solución

Supongamos que se deseara calcular el potencial en el centro del cubo en el caso de estar *todas* las caras a potencial V_0 . La función potencial en el interior del cubo se podría dar como suma de seis funciones, cada una de las cuales daría potencial V_0 en una de las caras y *cero* en todas las demás. Estas seis soluciones serían formalmente iguales excepto que cada una de ellas podría obtenerse

de cualquier otra mediante un giro de coordenadas alrededor del centro. Evidentemente, todas ellas darían el mismo valor para el potencial en el centro del cubo. De aquí que el potencial en el centro del cubo cuando sólo una de las caras está a potencial V_0 y todas las demás a *cero* sea un sexto del potencial correspondiente al caso de estar todas a V_0 . No habiendo carga en el interior del cubo y siendo éste una superficie cerrada equipotencial, el potencial en el centro será $V_0/6$.

★

4-34. Una superficie esférica está a potencial *cero* excepto en la región definida por $0 < \phi < \pi/3$, $\pi < \theta < \pi/2$. Hallar el potencial en el centro de la esfera.

Solución

La región que está a potencial distinto de *cero* V_0 , es un doceavo de la superficie de la esfera. Por un razonamiento análogo al del problema anterior se llega a la conclusión de que el potencial en el centro de la esfera es $V_0/12$.

★

4-35. Una esfera de radio a , uniformemente cargada con ρ coul/m³, tiene un hueco interior en forma de esfera concéntrica, de radio b . Hallar el potencial para $r > a$.

Solución

La solución se dará como superposición de los siguientes estados:

1º esfera no hueca, de radio a , cargada con ρ . 2º esfera de radio b cargada con $-\rho$.

1º Aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica de radio $r > a$.

$$\frac{4}{3} \pi r^3 D_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

$$D_1 = \rho (a^3/r^3)$$

$$E_1 = \epsilon \rho (a^3/r^3)$$

$$\Phi_1 = - \int E_1 dr = \epsilon \rho (a^3/2r^2)$$

donde hemos puesto nula la constante de integración ya que Φ_1 ha de ser nulo para $r \rightarrow \infty$.

2º Operando como antes

$$\Phi_2 = - \epsilon \rho (b^3/2r^2)$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\rho \epsilon}{2 r^2} (a^3 - b^3)$$

5 CALCULO DEL POTENCIAL METODO DE SEPARACION DE VARIABLES

En este método, la solución se va a expresar como producto de funciones, cada una de las cuales será función sólo de una de las coordenadas.

5-1.- Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas.

Para la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [5.1]$$

ensayamos la solución $\Phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$ [5.2]

Sustituyendo [5.2] en [5.1]

$$X'' Y Z + X Y'' Z + X Y Z'' = 0$$

o bien, dividiendo por XYZ

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad [5.3]$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \quad [5.4]$$

Como el primer miembro sólo depende de x y el segundo no depende de x, ambos serán igual a una constante, llamada de separación K_1^2 .

$$-\frac{X''}{X} = K_1^2$$

La solución de la ecuación diferencial

$$X'' + K_1^2 X = 0 \quad [5.5]$$

es

$$X(x) = A_1 \cos K_1 x + A_2 \operatorname{sen} K_1 x \quad [5.6]$$

Ahora hagamos

$$\frac{Y''}{Y} = K_1^2 - \frac{Z''}{Z} = K_2^2 \quad [5.7]$$

Razonando como para X (x)

$$Y(y) = B_1 \operatorname{ch} K_2 y + B_2 \operatorname{sh} K_2 y \quad [5.8]$$

Y lo mismo para Z (z)

$$Z(z) = C_1 \operatorname{ch} K_3 z + C_2 \operatorname{sh} K_3 z \quad [5.9]$$

Las constantes de separación han de cumplir

$$K_3^2 + K_2^2 = K_1^2 \quad [5.10]$$

y serán reales o imaginarias según las condiciones de contorno que deban satisfacer, con lo que las funciones X, Y y Z resultarán circulares o hiperbólicas.

Si, por ejemplo, el problema requiere ceros de potencial repetidos en el eje y, se tomará Y (y) circular.

Estas soluciones son capaces de satisfacer sólo condiciones de contorno muy simples. Veamos algunos ejemplos en dos dimensiones.

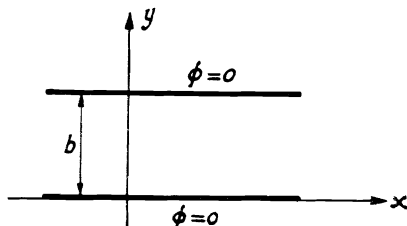


Fig. 5-1

Sean dos planos paralelos indefinidos situados a una distancia b el uno del otro y conectados a potencial cero.

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

Por haber ceros repetidos

en el eje y ensayaremos

$$Y(y) = B_1 \cos Ky + B_2 \operatorname{sen} Ky$$

$$X(x) = A_1 \operatorname{ch} Kx + A_2 \operatorname{sh} Kx$$

$$\Phi = (A_1 \operatorname{ch} Kx + A_2 \operatorname{sh} Kx) (B_1 \cos Ky + B_2 \operatorname{sen} Ky) \quad [5.11]$$

De las cinco constantes, dos se pueden determinar con las siguientes condiciones: $\Phi = 0$ para $y = 0$ y para $y = b$.

$$0 = (A_1 \operatorname{ch} Kx + A_2 \operatorname{sh} Kx) B_1$$

y, como esto tiene que cumplirse para todo x, $B_1 = 0$

$$0 = (A_1 \operatorname{ch} Kx + A_2 \operatorname{sh} Kx) B_2 \operatorname{sen} Kb$$

No puede ser $B_2 = 0$ porque entonces Φ sería idénticamente nulo en todo el plano. Luego $Kb = n\pi$, $K = \frac{n\pi}{b}$

Llamando $A_1 B_2 = C_1$, $A_2 B_2 = C_2$

$$\Phi = \left(C_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x + C_2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad [5.12]$$

Para determinar C_1 y C_2 se necesitan más datos. Si, por ejemplo, sabemos que hay simetría con respecto al eje y:

$$\Phi = C \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad [5.13]$$

Consideremos ahora el sistema de la figura 5-2. Evidentemente el resultado [5.12] es válido aquí. Hemos de añadir la condición:

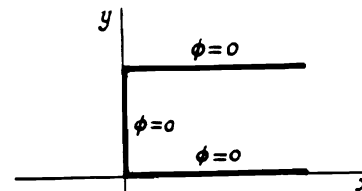


Fig. 5-2

$$\Phi = 0 \text{ en } x = 0$$

$$0 = C_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y$$

y como esto ha de cumplirse con independencia de y , $C_1 = 0$

$$\Phi = C \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad [5.14]$$

Pongamos ahora otro plano a potencial V_0 en $x = a$, naturalmente, aislado de los dos contiguos. La ecuación [5.14] sigue siendo válida si le imponemos la condición $\Phi = V_0$ en $x = a$

$$V_0 = C \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad [5.15]$$

[5.15] es una identidad que no se cumple para todo valor de y . Este aparente error se debe a que sólo hemos tomado una solución de la ecuación de Laplace, que no tiene por qué ser compatible con todas las condiciones de contorno.

Como [5.14] es solución de la ecuación de Laplace, lo será también

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad [5.16]$$

Se comprueba que [5.16] también cumple las condiciones $\Phi = 0$ en $x = 0$, en $y = 0$ y en $y = b$. Haciendo que Φ sea igual a V_0 en $x = a$

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad \text{para } 0 < y < b \quad [5.17]$$

La ecuación [5.17] sí es compatible y se la reconoce como el desarrollo en serie de Fourier de la función (constante) V_0 en el intervalo $0 < y < b$.

$$f(y) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y$$

con $b_n = \frac{4V_0}{n\pi}$, si n es impar y $b_n = 0$ si n es par. (Ver apéndice II).

$$C_n = \frac{b_n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}$$

La solución es, pues,

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y, \quad \text{con } n \neq 2$$

5.2.- Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

La forma general de la laplaciana en cilíndricas es

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad [5.18]$$

Simetría axial con invarianza longitudinal (problema dependiente sólo de r).

La laplaciana queda reducida a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad [5.19]$$

La solución es

$$\Phi = K_1 \ln r + K_2 \quad [5.20]$$

Invarianza longitudinal (problema dependiente sólo de r y φ).

Aplicando el método de separación de variables, ensayemos una solución de la forma

$$\Phi = P(r) Q(\varphi) \quad [5.21]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$P'' Q + \frac{1}{r} P' Q + \frac{1}{r^2} P Q'' = 0$$

$$r^2 \frac{P''}{P} + r \frac{P'}{P} = - \frac{Q''}{Q}$$

Igualemos $\frac{Q''}{Q} = -u^2$ (no podemos hacer $\frac{Q''}{Q} = u^2$ porque esto conduciría a funciones hiperbólicas en φ , incompatibles con la simetría circular del problema).

La solución de $\frac{Q''}{Q} = -u^2$ es

$$Q(\varphi) = A_1 \cos n\varphi + A_2 \sin n\varphi = A \cos(n\varphi + \alpha) = B \sin(n\varphi + \alpha)$$

Ahora queda la ecuación diferencial

$$r^2 \frac{P''}{P} + r \frac{P'}{P} = u^2$$

$$r^2 P'' + r P' - u^2 P = 0$$

cuya solución es

$$P(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$$

resultando el potencial

$$\Phi = (r, \varphi) = (C_1 r^n + C_2 r^{-n}) (A_1 \cos n\varphi + A_2 \sin n\varphi) \quad [5.22]$$

Si el eje interior a la zona en estudio, $C_2 = 0$, y si está fuera, $C_1 = 0$.

En determinados problemas, la solución [5.22] puede ser incompatible con las condiciones de contorno. Se puede ensayar entonces una solución más general

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad [5.23]$$

donde hemos puesto r con exponente positivo. Para el caso en que el eje de simetría se halle fuera de la zona de interés, bastará con poner r^{-n} en lugar de r^n .

Simetría axial (problema dependiente sólo de r y z).

En el caso, por ejemplo, de un cilindro conductor cerrado cuyas bases están a distintos potenciales.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [5.24]$$

Ensayamos $\Phi = R(r) Z(z)$. Sustituyendo en [5.24]

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} \quad [5.25]$$

La ecuación diferencial se puede resolver de dos formas diferentes.

1.ª) Haciendo $\frac{Z''}{Z} = T^2$

$$Z(z) = A_1 \operatorname{ch} Tz + A_2 \operatorname{sh} Tz \quad [5.26]$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + T^2 R = 0 \quad [5.27]$$

Mediante el cambio de variable $Tr = v$, la ecuación [5.27] se convierte en

$$\frac{d^2 R}{dv^2} + \frac{1}{v} \frac{dR}{dv} + R = 0 \quad [5.28]$$

Esta ecuación diferencial es del tipo de Bessel con $n = 0$.

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad [5.29]$$

La solución de [5.28] es

$$R = B_1 J_0(v) + B_2 N_0(v) \quad [5.30]$$

donde J y N son las funciones de Bessel de primera y segunda especies, respectivamente, (en este caso, de orden cero).

$J_0(v)$ y $N_0(v)$ tienen la forma indicada en la fig. 5.3.

N_0 tiende a $-\infty$ en el eje ($r = 0$). Entonces, si el eje está dentro de la zona de estudio, $B_2 = 0$.

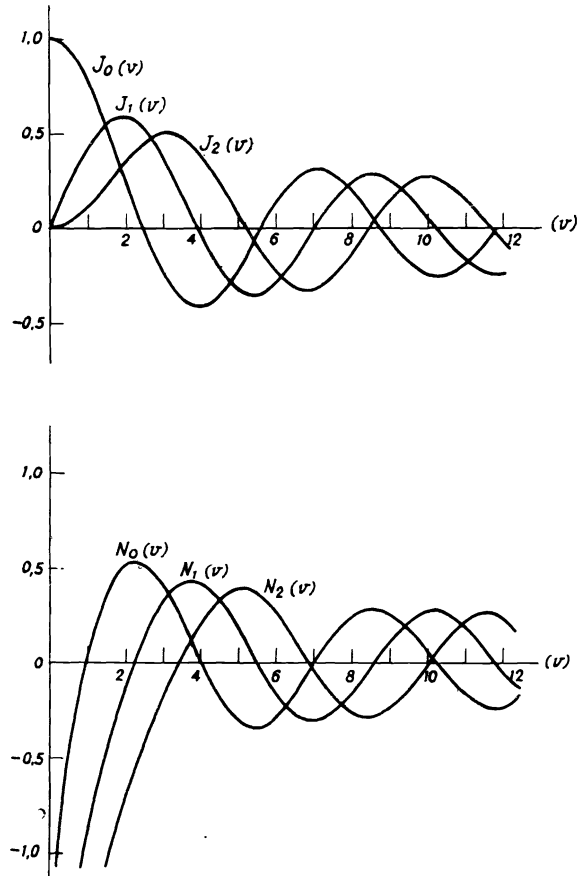


Fig. 5-3

2.a) $\frac{Z''}{Z} = -\tau^2$. Esto equivale a hacer en la solución anterior

$$T^2 = -\tau^2, \quad T = -j\tau, \quad \text{con } \tau \text{ real} \quad [5.31]$$

$$Z(z) = A_1' \cos \tau z + A_2' \sen \tau z \quad [5.31]$$

$$R(r) = B_1' J_0(j\tau r) + B_2' N_0(j\tau r) \quad [5.32]$$

El desarrollo en serie de potencias de $J_0(jv)$ es

$$J_0(jv) = 1 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{(v/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(v/2)^6}{(3!)^2} + \dots \quad [5.33]$$

Todos los términos del desarrollo son reales. $J_0(jv)$ está tabulada. Recibe el nombre de *función de Bessel modificada* y se la escribe también $I_0(v)$. En lugar de $N_0(j\tau r)$, suele ponerse como segunda solución en [5.32] la función de Bessel modificada de segunda especie, $K_0(\tau r)$, de la que se hablará más adelante.

$$R(r) = B_1' I_0(\tau r) + B_2' K_0(\tau r)$$

Las funciones $I_0(\tau r)$ y $K_0(\tau r)$ tienen la forma indicada en la figura 5-4. Si el eje es interior a la zona en estudio, tiene que ser $B_2 = 0$.

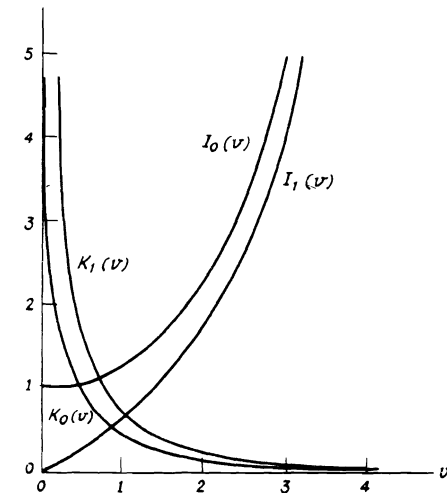


Fig. 5-4

Resumiendo, la solución de la ecuación de Laplace en el caso de simetría axial será una de las dos siguientes:

$$\Phi(r, z) = (B_1 J_0(Tr) + B_2 N_0(Tr)) (A_1 \operatorname{ch} Tz + A_2 \operatorname{sh} Tz) \quad [5.34]$$

$$\Phi(r, z) = (B'_1 I_0(\tau r) + B'_2 K_0(\tau r)) (A'_1 \cos \tau z + A'_2 \operatorname{sen} \tau z) \quad [5.35]$$

El caso más general en coordenadas cilíndricas se estudia en el apartado siguiente.

5.3.- Asimetría total en coordenadas cilíndricas.

Cuando el problema depende de las tres coordenadas r, φ, Z , ensayaremos una solución producto $\Phi = R(r) F(\varphi) Z(z)$.

Se pueden adoptar las siguientes soluciones para Z y F :

$$Z(z) = A_1 \operatorname{ch} Tz + A_2 \operatorname{sh} Tz \quad [5.36]$$

$$F(\varphi) = B_1 \cos n\varphi + B_2 \operatorname{sen} n\varphi \quad [5.37]$$

La ecuación diferencial para R será en este caso

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} R' + \left(T^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad [5.37]$$

Una de las soluciones de esta ecuación es

$$J_n(Tr) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tr/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!}, \quad [5.38]$$

función de Bessel de primera especie y orden n

En el caso, muy frecuente, de n entero, se convierte en

$$J_n(Tr) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (Tr/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \quad [5.39]$$

Otra solución, independiente de $J_n(Tr)$, es

$$N_n(Tr) = \frac{J_n(Tr) \cos n\pi - J_{-n}(Tr)}{\operatorname{sen} n\pi}, \quad \text{para } n \neq 0, 1, 2, \dots \quad [5.40]$$

que es la *función de Bessel de segunda especie de orden n* .

Para n nulo o entero, la expresión [5.40] es indeterminada. Entonces se la define como

$$N_n(Tr) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(Tr) \cos p\pi - J_{-p}(Tr)}{\operatorname{sen} p\pi} \quad [5.41]$$

Calculada por la regla de L'Hospital, resulta

$$N_n(Tr) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln(Tr/2) + \gamma \right\} J_n(Tr) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! (Tr/2)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \Psi(k) + \Psi(n+k) \right\} \frac{(Tr/2)^{2k+n}}{k! (n+k)!} \quad [5.42]$$

donde $\gamma = 0,5772156\dots$ es la constante de Euler y

$$\Psi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

Soluciones completas de [5.37] son

$$R = C_1 J_n(Tr) + C_2 J_{-n}(Tr), \quad \text{para } n \neq 0, 1, 2, \dots \quad [5.42]$$

$$R = C_1 J_n(Tr) + C_2 N_n(Tr), \quad \text{para todo } n \quad [5.43]$$

Si adoptamos para Z y P las siguientes soluciones:

$$Z(z) = A'_1 \cos \tau z + A'_2 \operatorname{sen} \tau z \quad [5.44]$$

$$F(\varphi) = B'_1 \cos n\varphi + B'_2 \operatorname{sen} n\varphi \quad [5.45]$$

la ecuación diferencial para R sería

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \left(\tau^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad [5.46]$$

que es la ecuación de Bessel modificada de orden n . Sus soluciones son las funciones de Bessel modificadas de orden n . Las de primera especie son:

$$I_{\pm n}(\tau r) = j^{\mp n} J_{\pm n}(j\tau r) \quad [5.47]$$

Las de segunda especie son:

$$K_n(\tau r) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} n\pi} \left\{ I_{-n}(\tau r) - I_n(\tau r) \right\} \quad [5.48]$$

Esta definición de K_n es indeterminada para n entero, pero se la puede calcular como límite, lo mismo que se hizo con N_n .

Soluciones completas de [5.46] son:

$$R = C_1 I_n(\tau r) + C_2 I_{-n}(\tau r), \text{ para } n \neq 0, 1, 2, \dots \quad [5.49]$$

$$R = C_1 I_n(\tau r) + C_2 K_n(\tau r), \text{ para todo } n \quad [5.50]$$

Definiendo las funciones de Hankel de primera especie como

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + j N_n(x) \quad [5.51]$$

y de segunda especie como

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - j N_n(x) \quad [5.52]$$

todavía se pueden dar otras soluciones de [5.37] y [5.46] combinando estas funciones con las de Bessel. En particular, [5.46] admite la solución:

$$R = A_1 J_n(j\tau r) + A_2 H_n^{(1)}(j\tau r) \quad [5.53]$$

válida para todo n .

5.4.- Fórmulas relativas a las funciones de Bessel.

Derivadas.- Las siguientes propiedades son comunes a las funciones:

$J_n(v)$, $N_n(v)$, $H_n^{(1)}(v)$ y $H_n^{(2)}(v)$. Sea $R_n(v)$ una cualquiera de ellas.

$$R'_0 = -R_1 \quad [5.54]$$

$$R'_1 = R_0 - \frac{1}{v} R_1 \quad [5.55]$$

$$vR'_n = nR_n - vR_{n+1} \quad [5.56]$$

$$vR'_n = -nR_n + vR_{n-1} \quad [5.57]$$

$$\frac{d}{dv} \left\{ v^{-n} R_n \right\} = -v^{-n} R_{n+1} \quad [5.58]$$

$$\frac{d}{dv} \left\{ v^n R_n \right\} = v^n R_{n-1} \quad [5.59]$$

$$vI'_n = nI_n + vI_{n+1} \quad [5.60]$$

$$vI'_n = -nI_n + vI_{n-1} \quad [5.61]$$

$$vK'_n = nK_n - vK_{n+1} \quad [5.62]$$

$$vK'_n = -nK_n - vK_{n-1} \quad [5.63]$$

Fórmulas de recurrencia.

$$\frac{2n}{v} R_n = R_{n+1} + R_{n-1} \quad [5.64]$$

$$\frac{2n}{v} I_n = I_{n-1} - I_{n+1} \quad [5.65]$$

$$\frac{2n}{v} K_n = K_{n+1} - K_{n-1} \quad [5.66]$$

Integrales.

$$\int v^{-n} R_{n+1}(v) dv = -v^{-n} R_n(v) \quad [5.67]$$

$$\int v^n R_{n-1}(v) dv = v^n R_n(v) \quad [5.68]$$

$$\int v R_n(\alpha v) R_n(\beta v) dv = \frac{v}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \beta R_n(\alpha v) R_{n-1}(\beta v) - \alpha R_{n-1}(\alpha v) R_n(\beta v) \right\},$$

para $\alpha \neq \beta$ [5.69]

$$\int v R_n^2(\alpha v) dv = \frac{v^2}{2} \left\{ R_n^2(\alpha v) - R_{n-1}(\alpha v) R_{n+1}(\alpha v) \right\} =$$

$$= \frac{v^2}{2} \left\{ R_n'^2(\alpha v) + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 v^2} \right) R_n^2(\alpha v) \right\} \quad [5.70]$$

5.5.- Desarrollo de una función en series de Bessel.

El cálculo de los coeficientes de las series de Fourier de senos y cosenos es po-

sible gracias a la ortogonalidad de las funciones circulares. Existe una ortogonalidad similar de las funciones de *Bessel*. Si las fórmulas [5.69] y [5.70] se particularizan para $n = 0$ y si en lugar de α y β se pone $\frac{\rho_m}{a}$ y $\frac{\rho_q}{a}$, siendo ρ_m y ρ_q la m -ésima y q -ésima raíces de $J_0(v) = 0$, es decir $J_0(\rho_m) = 0$ y $J_0(\rho_q) = 0$, y si $\rho_m \neq \rho_q$, de [5.69] se deduce

$$\int_0^a r J_0\left(\frac{\rho_m r}{a}\right) J_0\left(\frac{\rho_q r}{a}\right) dr = 0 \quad [5.71]$$

Así pues, si se puede desarrollar una función $f(r)$ en serie de *Bessel* de orden cero, el desarrollo será:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_0\left(\frac{\rho_m r}{a}\right) \quad [5.72]$$

Multiplicando los dos miembros de [5.72] por $\left\{ r J_0\left(\frac{\rho_q r}{a}\right) \right\}$, integrando de 0 a a y teniendo en cuenta [5.71] y [5.70]

$$\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\rho_m r}{a}\right) dr = \int_0^a b_m r \left[J_0\left(\frac{\rho_m r}{a}\right) \right]^2 dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\rho_m) b_m$$

de donde:

$$b_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\rho_m)} \int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\rho_m r}{a}\right) dr \quad [5.73]$$

5.6.- Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

La laplaciana en coordenadas esféricas es:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \quad [5.74]$$

que también se puede poner:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{r^2 \partial\theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg}\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \quad [5.75]$$

Los ángulos θ y φ se miden tal como se indica en la fig. 5.5.

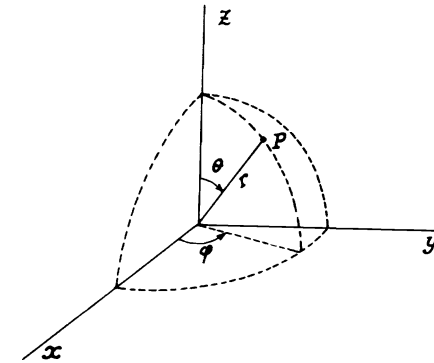


Fig. 5.5

a) Caso en que existe simetría alrededor del eje z. (Problema independiente de φ).

Ensayemos una solución producto:

$$\Phi = R(r) \Theta(\theta)$$

Sustituyendo en [5.75]

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \frac{\Theta'}{\Theta} = 0 \quad [5.76]$$

Haciendo

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = n(n+1)$$

queda la ecuación diferencial:

$$r^2 R'' + 2r R' - n(n+1)R = 0 \quad [5.77]$$

Ensayamos la solución $R = A r^\alpha$:

$$A \alpha(\alpha - 1) + 2A\alpha - n(n+1)A = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - n(n+1) = 0 \quad [5.78]$$

Como las soluciones de [5.78] son $\alpha_1 = n$, $\alpha_2 = -(n+1)$, la solución de [5.77]

será:

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \quad [5.79]$$

Volviendo a [5.76]:

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} = -(n+1) \quad [5.80]$$

Haciendo el cambio $\cos \theta = x$

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + n(n+1)\Theta = 0 \quad [5.81]$$

ecuación diferencial de Legendre, cuya solución es:

$$\Theta = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x) \quad [5.82]$$

Las funciones de Legendre de segunda especie, $Q_n(x)$, contienen todas un término en $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ por lo que son singulares en $x = \pm 1$ ($\theta = 0$ y $\theta = \pi$) y como normalmente el eje z estará en la zona en estudio, hemos de poner $C_2 = 0$.

Las funciones de Legendre de primera especie, o polinomios de Legendre, se obtienen mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad [5.83]$$

Los primeros polinomios de Legendre, puestos en función de θ , son:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 2\theta)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8} (3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta)$$

$$P_4(\cos \theta) = \frac{1}{64} (9 + 20 \cos 2\theta + 35 \cos 4\theta)$$

Para $\theta = 0$, $x = 1$, $P_n(\cos \theta) = P_n(x) = 1$. Son ortogonales en el intervalo

$$-1 < x < 1 \quad -1 < x < 1$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad [5.84]$$

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad [5.85]$$

La solución para el potencial en este caso es:

$$\Phi = \left\{ A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \right\} P_n(\cos \theta) \quad [5.86]$$

y si el origen de coordenadas está dentro de la zona en estudio:

$$\Phi = A r^n P_n(\cos \theta) \quad [5.87]$$

b) *Asimetría total.* Ensayamos $\Phi = R(r) \Psi(\varphi) \Theta(\theta)$

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} \operatorname{sen}^2 \theta = -\frac{\Psi''}{\Psi} \quad [5.88]$$

Escogemos para Ψ una solución en forma de funciones circulares:

$$\frac{\Psi''}{\Psi} = -m^2, \quad \Psi(\varphi) = A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi \quad [5.89]$$

Sustituimos en [5.88] y hacemos:

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = n(n+1), \quad R(r) = B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)} \quad [5.90]$$

La ecuación diferencial que resulta para Θ es:

$$\Theta'' + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \Theta' + n(n+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \Theta = 0 \quad [5.91]$$

Haciendo el cambio $\cos \theta = x$:

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \Theta = 0 \quad [5.92]$$

Si $m = 0$, [5.92] es la ecuación de Legendre [5.81]. La solución general de [5.92] es:

$$\Theta = A P_n^m(x) + B Q_n^m(x) \quad [5.93]$$

donde $Q_n^m(x)$, polinomios asociados de Legendre de segunda especie, son singu-

lares en $x = \pm 1$, y

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n \quad [5.94]$$

con los polinomios asociados de Legendre de primera especie.

La solución de Φ se puede poner:

$$\Phi = \left\{ B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)} \right\} \left\{ A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi \right\} P_n^m(\cos\theta) \quad [5.95]$$

PROBLEMAS

COORDENADAS CARTESIANAS

5-1. Hallar la función potencial en una región descargada delimitada por $y = 0$ a potencial cero ; $y = b$ a potencial cero ; $x = 0$ a potencial cero , y por una superficie comprendida entre los planos $y = 0$ e $y = b$, cuya traza pasa por el punto $x = a$, $y = b/2$, a potencial V_0 . Determinar la forma de la superficie.

Solución

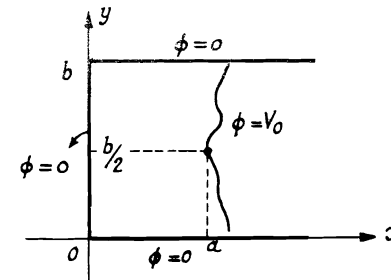


Fig. 5.6

Como hay ceros de potencial repetidos en el eje y , elegiremos funciones circulares para la variable y .

$$\Phi = (A' \operatorname{ch} Kx + B' \operatorname{sh} Kx) (A'' \cos Ky + B'' \sin Ky)$$

Para $y = 0$, $\Phi = 0$ independiente de x

$$0 = F(x) A'' \Rightarrow A'' = 0$$

Para $y = b$, $\Phi = 0$ independiente de x

$$0 = F(x) B'' \sin Kb \Rightarrow Kb = n\pi , K = n\pi/b$$

Para $x = 0$, $\Phi = 0$ independiente de y

$$0 = A' G(y) \Rightarrow A' = 0$$

Haciendo $B' B'' = B$

$$\Phi = B \operatorname{sh} Kx \sin Ky$$

En el punto $(a, b/2)$, $\Phi = V_0$

$$V_0 = B \operatorname{sh} Ka \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \frac{b}{2} \right) = \pm B \operatorname{sh} Ka$$

y además tiene que ser $n \neq 2$

$$B = \pm \frac{V_0}{\operatorname{sh}(Ka)}$$

Con este valor de B el potencial es

$$\Phi = \pm \frac{V_0}{\operatorname{sh} Ka} \operatorname{sh} Kx \operatorname{sen} Ky$$

En todos los puntos de la superficie es $\Phi = V_0$, luego la ecuación pedida es

$$V_0 = \pm \frac{V_0}{\operatorname{sh} Ka} \operatorname{sen} Ky \operatorname{sh} Kx$$

$$\operatorname{sh}(n\pi x/b) \operatorname{sen}(n\pi y/b) = \pm \operatorname{sh}(n\pi a/b)$$

Su forma es la indicada en la figura 5-7

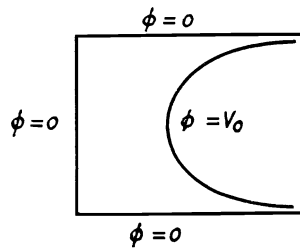


Fig. 5.7

★

5-2. Hallar la función potencial en el interior de un sistema de electrodos definido por: $x = 0$ a cero volt; $x = a$ a cero volt; $y = 0$ a cero volt; $y = b$ a V_0 volt.

Solución

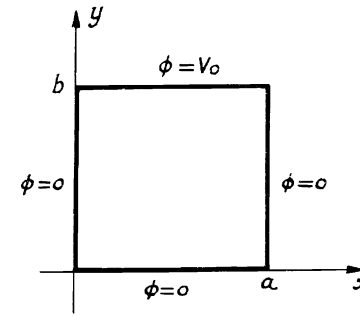


Fig. 5.8

Suponiendo una solución en forma de producto, con ceros repetidos en el eje x

$$\Phi = (A' \cos Kx + B' \operatorname{sen} Kx) (A'' \operatorname{ch} Ky + B'' \operatorname{sh} Ky)$$

Obligamos a esta función a satisfacer las condiciones de contorno

En $x = 0$, $\Phi = 0$ con independencia del valor de y

$$0 = A' F(y) \Rightarrow A' = 0$$

En $x = a$, $\Phi = 0$ independiente de y

$$0 = B' \operatorname{sen} Ka F(y) \Rightarrow Ka = n\pi \quad K = n\pi/a$$

En $y = 0$, $\Phi = 0$ independiente de x

$$0 = G(x) A'' \Rightarrow A'' = 0$$

Haciendo $B' B'' = B$

$$\Phi = B \operatorname{sen} Kx \operatorname{sh} Ky$$

En $y = b$, $\Phi = V_0$, y por lo tanto

$$V_0 = B \operatorname{sen} Kx \operatorname{sh} Ky$$

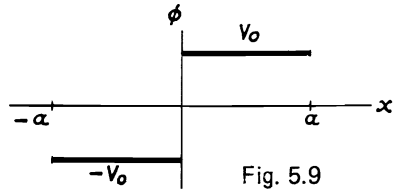
lo cual no es posible a menos que empleemos una solución más completa, en forma de serie de Fourier. Supongamos que el potencial es

$$\Phi = \sum_1^{\infty} B_n \operatorname{sh}(n\pi y/a) \operatorname{sen}(n\pi x/a) \quad [1]$$

que tendrá que cumplir

$$V_0 = \sum_1^{\infty} B_n \operatorname{sh}(n\pi b/a) \operatorname{sen}(n\pi x/a) \quad [2]$$

Formemos la función impar, definida en $-a < x < a$, de la figura 5-9.



El desarrollo en serie de Fourier de esta función, por ser impar, sólo contiene términos en seno

$$V_0 = \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/a) \quad [3]$$

Comparando esta expresión con [2] se deduce que

$$b_n = B_n \operatorname{sh}(n\pi b/a)$$

Los coeficientes b_n del desarrollo son

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0 \operatorname{sen}(n\pi x/a) dx = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } n = 2 \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{para } n \neq 2 \end{cases}$$

$$B_n = \frac{b_n}{\operatorname{sh}(n\pi b/a)} = \frac{4V_0}{n\pi} \frac{1}{\operatorname{sh}(n\pi b/a)}$$

Sustituyendo en [1]

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\operatorname{sh}(n\pi y/a)}{\operatorname{sh}(n\pi b/a)} \operatorname{sen}(n\pi x/a) \quad \text{para } n \neq 2$$

Es conveniente comprobar que esta solución satisface las condiciones de contorno.

5-3. Determinar la función potencial en el interior de un cilindro conductor indefinido cuya traza (rectangular) en el plano (x, y) es:

$$y = 0 \text{ e } y = b \text{ a cero volt, } x = a \text{ y } x = -a \text{ a } V_0 \text{ volt}$$

Solución

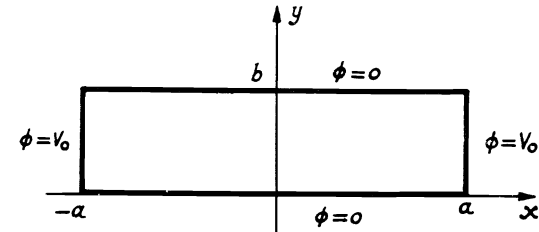


Fig. 5.10

Supongamos que la solución es del tipo:

$$\Phi = (A' \cos Kx + B' \operatorname{sen} Kx) (A'' \operatorname{ch} Ky + B'' \operatorname{sh} Ky) \quad [1]$$

$$\text{En } y = 0, \Phi = 0 \Rightarrow A'' = 0$$

$$\text{En } y = b, \Phi = 0$$

$$0 = F(x) B'' \operatorname{sh} Ky$$

y para que esto se cumpla ha de ser $B'' = 0$ o bien $K = 0$. Ambas alternativas hacen que el potencial dado por [1] sea idénticamente nulo en toda la región; ensayaremos

$$\Phi = (A' \operatorname{ch} Kx + B' \operatorname{sh} Kx) (A'' \cos Ky + B'' \operatorname{sen} Ky) \quad [2]$$

$$\text{En } y = 0, \Phi = 0 \Rightarrow A'' = 0$$

$$\text{En } y = b, \Phi = 0 \Rightarrow Kb = n\pi, K = \frac{n\pi}{b}$$

$$\text{En } x = a \text{ y } x = -a, \Phi = V_0$$

$$\begin{cases} V_0 = (A' \operatorname{ch} Ka + B' \operatorname{sh} Ka) B'' \operatorname{sen} Ky & [3] \\ V_0 = (A' \operatorname{ch} Ka - B' \operatorname{sh} Ka) B'' \operatorname{sen} Ky & [4] \end{cases}$$

Comparando [3] y [4] se ve que $B' = 0$

$$V_0 = A \operatorname{ch} Ka \operatorname{sen} Ky \quad [5]$$

[5] es una ecuación que no se cumple para todo $0 < y < b$. Nos vemos obligados a ensayar

$$\Phi = \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{ch} Kx \operatorname{sen} Ky \quad [6]$$

solución ésta que debe cumplir

$$V_0 = \sum_1^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

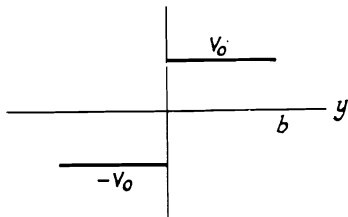


Fig. 5.11

Formamos la función impar de la figura 5-11, cuyo desarrollo en serie de Fourier es

$$\begin{cases} V_0 & \text{para } 0 < y < b \\ -V_0 & \text{para } -b < y < 0 \end{cases} = \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y$$

con

$$b_n = \frac{2}{b} \int_0^b V_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dy = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & \text{para } n \neq 2 \\ 0 & \text{para } n = 2 \end{cases}$$

Como $b_n = A_n \operatorname{ch}(n\pi a/b)$, $A_n = \frac{b_n}{\operatorname{ch}(n\pi a/b)}$

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\operatorname{ch}(n\pi x/b)}{\operatorname{ch}(n\pi a/b)} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y, \quad n \neq 2$$

★

5-4. En un plano se tiene un contorno formado por un cuadrante de corona circular de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). Los arcos están a V_0 y los segmentos rectos a cero volt. Determinar la función potencial para los puntos interiores.

Solución

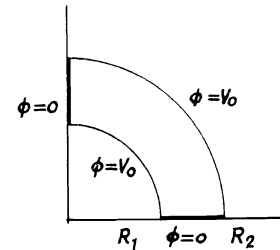


Fig. 5.12

Aplicamos una transformación logarítmica

$$W = \ln Z = \ln \rho + j\varphi = u + jv$$

$$u = \ln \rho, \quad v = \varphi$$

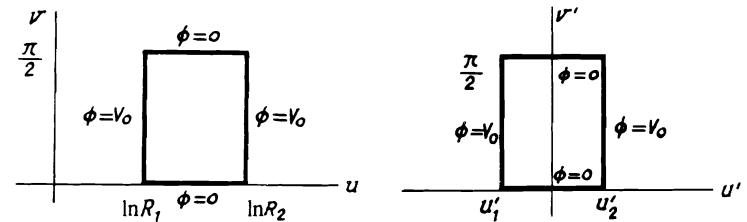


Fig. 5.13

Del plano W deseamos pasar al W' para obtener el contorno y las condiciones de contorno del problema anterior. La transformación es

$$u' = u - \frac{\ln R_1 + \ln R_2}{2}, \quad v' = v$$

$$u'_2 = \ln R_2 - \frac{\ln R_1}{2} - \frac{\ln R_2}{2} = \frac{\ln R_2 - \ln R_1}{2}$$

$$u_1' = -u_2'$$

La función potencial en el plano W' es la que obtuvimos en el problema anterior si cambiamos: $b \rightarrow \pi/2$, $a \rightarrow u_2'$, $y \rightarrow v'$, $x \rightarrow u'$.

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\text{ch} \frac{n\pi 2}{\pi} u'}{\text{ch} \frac{n\pi 2}{\pi} u_2'} \text{sen} \frac{n\pi 2}{\pi} v'$$

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{4\pi} \frac{\text{ch} [n \ln (\rho^2/R_1 R_2)]}{\text{ch} [n \ln (R_2/R_1)]} \text{sen} 2n\varphi$$

★

5.5.- Se tiene una región sin cargas limitada por los semiplanos $y = 0$ e $y = b$, que se extienden desde $x = 0$ hasta $x \rightarrow \infty$, y la porción de plano $x = 0$ comprendida entre $y = 0$ e $y = b$. Hallar la función en el interior.

Solución

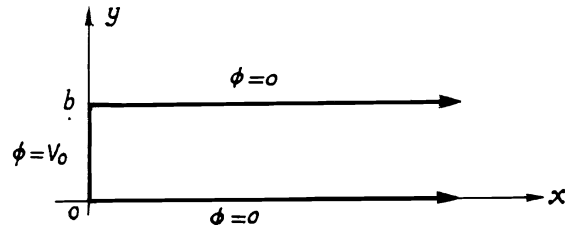


Fig. 5.14

Por haber ceros de potencial repetidos en el eje y , elegiremos funciones circulares para y . Además, dada la relación existente entre las funciones hiperbólicas y las exponenciales de exponente real (ver Apéndice II) podemos poner

$$\Phi = (A e^{Kx} + A e^{-Kx}) (C \cos Ky + D \text{sen} Ky) \tag{1}$$

En $y = 0$, $\Phi = 0$

$$0 = F(x) C \Rightarrow C = 0$$

En $y = b$, $\Phi = 0$

$$0 = F(x) B \text{sen} Kb, \quad Kb = n\pi, \quad K = \frac{n\pi}{b}$$

Para que no se haga infinito el potencial en $x \rightarrow \infty$, tiene que ser $A = 0$, quedando el potencial

$$\Phi = B e^{-Kx} \text{sen} Ky$$

En $x = 0$, $\Phi = V_0$: para poder satisfacer esta condición tenemos que ensayar una solución más general

$$\Phi = \sum_1^{\infty} B_n e^{-Kx} \text{sen} Ky \tag{2}$$

que ha de cumplir

$$V_0 = \sum_1^{\infty} B_n \text{sen} Ky \tag{3}$$

Desarrollando V_0 entre 0 y b en serie de senos

$$V_0 = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi}{b} y, \quad n \neq 2 \tag{4}$$

Comparando [3] y [4] y sustituyendo B_n en [2]

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} e^{-(n\pi/b)x} \text{sen} \frac{n\pi}{b} y, \quad n \neq 2 \tag{5}$$

Vamos a comprobar que [5] cumple las condiciones de contorno

En $y = 0$, $\text{sen} \frac{n\pi}{b} 0 = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

En $y = b$, $\text{sen} \frac{n\pi}{b} b = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

En $x \rightarrow \infty$, $\Phi = 0$ por ser nulo el factor exponencial

En $x = 0$, $0 < y < b$

$$\Phi_0 = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \text{sen} \frac{n\pi}{b} y , n \neq 2$$

que es precisamente V_0 para $0 < y < b$

★

5-6. Hallar la función potencial en el interior de un cilindro conductor indefinido limitado por los planos: $x = \pm a$ a V_0 , $y = 0$ a V_1 e $y = b$ a cero volt.

Solución

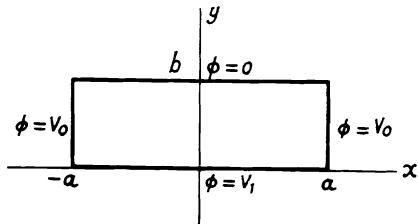


Fig. 5.15

Aplicando el método de superposición el problema se reduce a hallar las soluciones Φ_1 y Φ_2 para los sistemas representados en la figura 5-16.

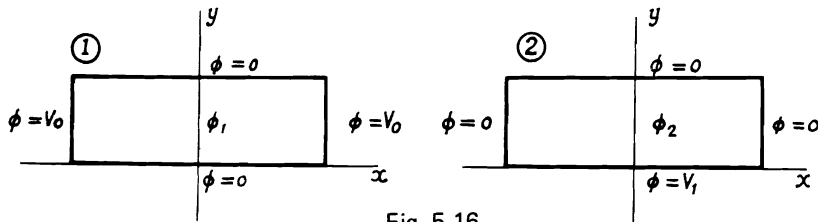


Fig. 5.16

Φ_1 ha sido obtenida en el problema 5-3.

$$\Phi_1 = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\text{ch} (n\pi x/b)}{\text{ch} (n\pi a/b)} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} , n \neq 2 \quad [1]$$

Para hallar Φ_2 ensayaremos

$$\Phi_2 = (A \cos Kx + B \text{sen} Kx) (C \text{ch} Ky + D \text{sh} Ky) \quad [2]$$

Plano $x = -a$, $\Phi_2 = 0$

$$0 = (A \cos Ka - B \text{sen} Ka) G(y) \quad [3]$$

Plano $x = a$, $\Phi_2 = 0$

$$0 = (A \cos Ka + B \text{sen} Ka) G(y) \quad [4]$$

Comparando [3] y [4] , $B = 0$

$$\Phi_2 = \cos Kx (C \text{ch} Ky + D \text{sh} Ky) \quad [5]$$

En [3] y [4] se ve que $\cos Ka = 0$, $Ka = n\pi + \frac{\pi}{2} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$

$$K = \left(\frac{2n+1}{2} \right) \frac{\pi}{a}$$

Plano $y = b$, $\Phi_2 = 0$. Esta condición no la puede cumplir [5] a menos que sean $C = D = 0$, porque $\text{ch} Ky$ no se anula y $\text{sh} Ky$ sólo se anula en $y = 0$. El que se anule $\text{sh} Ky$ en $y = 0$ nos induce a ensayar

$$\Phi_2 = \cos Kr \left[C \text{ch} (K(y-b)) + D \text{sh} (K(y-b)) \right] \quad [6]$$

En $y = b$

$$0 = \cos Kx \left\{ C \text{ch} (K(b-b)) + D \text{sh} (K(b-b)) \right\} = C \cos Kx$$

por lo que $C = 0$.

$$\Phi_2 = D \cos Kx \text{sh} K(y-b) \quad [7]$$

En $y = 0$, $\Phi_2 = V_1$

$$V_1 = - D \cos Kx \text{sh} Kb \quad [8]$$

Tampoco la función potencial [7] puede satisfacer [8] pero con este inconveniente ya estamos familiarizados y sabemos que la solución que se debe ensayar

es

$$\Phi_2 = \sum_1^{\infty} (-D_n) \cos Kx \text{ sh } K(y-b) \quad [9]$$

$$V_1 = \sum_1^{\infty} D_n \text{ sh } Kb \cos Kx = \sum_1^{\infty} D_n \text{ sh } Kb \cos \left(\frac{n\pi x}{a} + \frac{\pi x}{2a} \right) \quad [10]$$

El argumento de la función \cos que aparece en [10] es incómodo a la hora de hacer el desarrollo en serie. Resolveremos más fácilmente el problema haciendo una transformación al sistema de coordenadas de la figura 5-17.

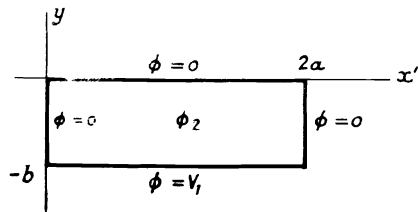


Fig. 5.17

$$\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y-b \end{cases} \quad \Phi_2 = (A \cos Kx' + B \text{ sen } Kx') (C \text{ ch } Ky' + D \text{ sh } Ky') \quad [11]$$

Plano $x' = 0$, $\Phi_2 = 0 \Rightarrow A = 0$

Plano $x' = 2a$, $\Phi_2 = 0$

$0 = \text{sen } 2Ka \text{ F}(y') \Rightarrow 2Ka = n\pi$, $K = \frac{n\pi}{2a} = \frac{n\pi}{d}$, con $d = 2a$

$$\Phi_2 = \text{sen } \frac{n\pi x'}{d} \left(C \text{ ch } \frac{n\pi y'}{d} + D \text{ sh } \frac{n\pi y'}{d} \right) \quad [12]$$

Plano $y = 0$: $\Phi_2 = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\Phi_2 = D \text{ sen } \frac{n\pi x'}{d} \text{ sh } \frac{n\pi y'}{d} \quad [13]$$

Plano $y = -b$: $\Phi_2 = V_1$

$$V_1 = -D \text{ sen } \frac{n\pi x'}{d} \text{ sh } \frac{n\pi b}{d} \quad [14]$$

A la vista de [14] ensayamos

$$\Phi_2 = - \sum_1^{\infty} D_n \text{ sen } \frac{n\pi x'}{d} \text{ sh } \frac{n\pi y'}{d} \quad [16]$$

$$V_1 = \sum_1^{\infty} D_n \text{ sh } \frac{n\pi b}{d} \text{ sen } \frac{n\pi x'}{d} \quad [17]$$

que puede hacerse coincidir con un desarrollo en serie de Fourier en senos (función impar entre $-d$ y d).

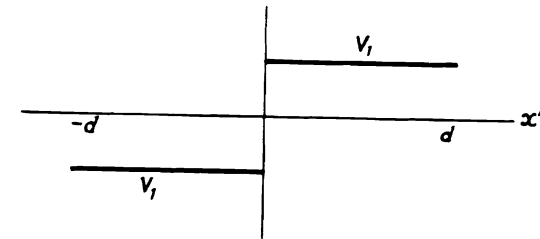


Fig. 5-18

$$V_1 = \sum_1^{\infty} a_n \text{ sen } \frac{n\pi x'}{d} \quad [18]$$

donde $a_n = \frac{4V_1}{n\pi}$, $n \neq 0$

Comparando [17] con [18]

$$D_n = \frac{4V_1}{n\pi} \frac{1}{\text{sh}(n\pi b/d)}, \quad n \neq 0$$

Sustituyendo en [16] y volviendo al plano x, y

$$\Phi_2 = - \sum_1^{\infty} \frac{4V_1}{n\pi} \frac{\text{sh} \frac{n\pi(y-b)}{2a}}{\text{sh} \frac{n\pi b}{2a}} \text{ sen } \frac{n\pi(x+a)}{2a}, \quad n \neq 0$$

La solución del problema será (*)

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\text{ch } \frac{n\pi x}{b}}{\text{ch } \frac{n\pi a}{b}} \text{sen } \frac{n\pi y}{b} - \frac{4V_1}{n\pi} \frac{\text{sh } \frac{n\pi(y-b)}{2a}}{\text{sh } \frac{n\pi b}{2a}} \text{sen } \frac{n\pi(x+a)}{2a} \right\}, n \neq 2 \quad [19]$$

5-7.- Considérese una región bidimensional rectangular. Se dan los siguientes potenciales de contorno: cero en $x = 0$ y $V = K'y$ en $x = a$. Imponer condiciones adecuadas al potencial en las otras dos caras del rectángulo y obtener la función potencial en el interior.

Solución:

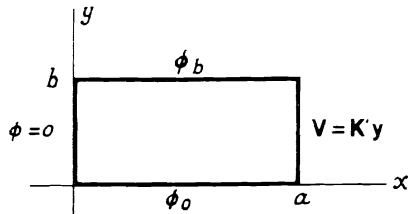


Fig. 5-19

Los potenciales en las caras $y = 0$ e $y = b$ serán funciones de x

$$\Phi_b = \Phi_b(x)$$

$$\Phi_0 = \Phi_0(x)$$

que podemos definir según nos convenga.

Ensayamos

$$\Phi = (A \text{ ch } Kx + B \text{ sh } Kx) (C \cos Ky + D \text{ sen } Ky) \quad [1]$$

En $x = 0$, $\Phi = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\Phi = \text{sh } Kx (C \cos Ky + D \text{ sen } Ky) \quad [2]$$

(*) El camino seguido para determinar Φ_2 ha sido verdaderamente tortuoso; pero constituye una cadena lógica de ensayos sucesivos y hemos preferido hacer este desarrollo completo en vez de proponer desde el principio la solución [12], pues esto habría parecido al lector (y efectivamente lo sería) un tanto arbitrario.

donde la constante B ha quedado absorbida en C y D .

En $y = 0$ puede ponerse $\Phi_0 = 0$ para que $C = 0$

$$\Phi = D \text{ sh } Kx \text{ sen } Ky \quad [3]$$

En $y = b$ lo más cómodo será poner $\Phi = 0$ para que $K = n\pi/b$

$$\Phi = D \text{ sh } \frac{n\pi x}{b} \text{ sen } \frac{n\pi y}{b} \quad [4]$$

En $x = a$, $\Phi = K'y$

$$K'y = D \text{ sh } \frac{n\pi a}{b} \text{ sen } \frac{n\pi y}{b}$$

relación que, evidentemente, no puede cumplirse. Ensayamos

$$\Phi = \sum_1^{\infty} D_n \text{ sh } \frac{n\pi x}{b} \text{ sen } \frac{n\pi y}{b} \quad [5]$$

$$F(y) = K'y = \sum_1^{\infty} D_n \text{ sh } \frac{n\pi a}{b} \text{ sen } \frac{n\pi y}{b} \quad [6]$$

Completamos la función $F(y)$, definida en $0 < y < b$, con $F(y)$, $-b < y < 0$, para que el desarrollo de Fourier sólo contenga *sen*s. Ese desarrollo será:

$$K'y = \sum_1^{\infty} d_n \text{ sen } \frac{n\pi y}{b} \quad [7]$$

$$d_n = \frac{2}{b} \int_0^b K'y \text{ sen } \frac{n\pi y}{b} dy$$

Integrando por partes

$$d_n = \frac{2K'b}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$D_n = \frac{d_n}{\text{sh}(n\pi a/b)} = (-1)^{n+1} \frac{2K'b}{n\pi \text{sh}(n\pi a/b)}$$

y sustituyendo en [5]

$$\Phi = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2K'b}{n\pi} \frac{\text{sh}(n\pi x/b)}{\text{sh}(n\pi a/b)} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

★

5-8. Dos placas conductoras paralelas están situadas en $y = 0$ e $y = a$. Se coloca una cinta conductora en $x = 0$, $(a/2) < y < a$, $-\infty < z < \infty$, conectada a la placa superior. Suponer una variación lineal del potencial en $x = 0$ y, mediante el método de superposición de condiciones de contorno, hallar la expresión del potencial entre las placas.

Solución

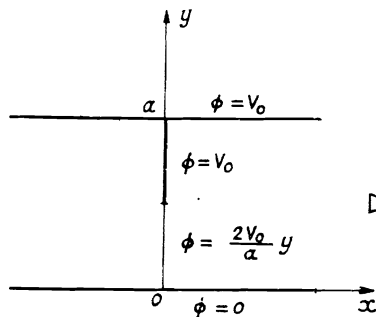


Fig. 5.20

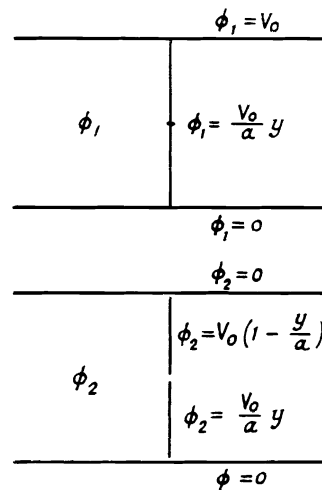


Fig. 5.21

Descomponemos el conjunto de condiciones de contorno en los dos sistemas de la figura 5-21.

La función potencial del sistema dado será $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

El sistema ① es un simple condensador plano entre cuyas placas el potencial es $\Phi_1 = (V_0/a)y$, función que cumple las tres condiciones de contorno.

Para el sistema ② ensayamos

$$\Phi_2 = (A \text{ch} Kx + B \text{sh} Kx) (C \cos Ky + D \text{sen} Ky) \quad [1]$$

En $y = 0$, $\Phi_2 = 0$, $C = 0$

En $y = a$, $\Phi_2 = 0$, $K = \frac{n\pi}{a}$

En $x = 0$, $\text{sh} Kx = 0$, y para evitar la indeterminación de B ponemos: $B = 0$

$$\Phi_2 = A \text{ch} Kx \text{sen} Ky \quad [2]$$

Pero, como era de esperar, ② no puede satisfacer la condición de contorno en $x = 0$. Ensayamos, pues, la serie

$$\Phi_2 = \sum_1^{\infty} A_n \text{ch} Kx \text{sen} Ky \quad [3]$$

que ha de cumplir

$$\Phi_2 \Big|_{x=0} = \begin{cases} V_0 (1-y/a) \text{ para } (a/2) < y < a \\ \frac{V_0 y}{a} \text{ para } 0 < y < (a/2) \end{cases}$$

Completamos la función en $-a < y < 0$ para que el desarrollo en serie de Fourier sólo contenga términos en seno.

El desarrollo de esa función será

$$F(y) = \sum_1^{\infty} a_n \text{sen} Ky \quad [4]$$

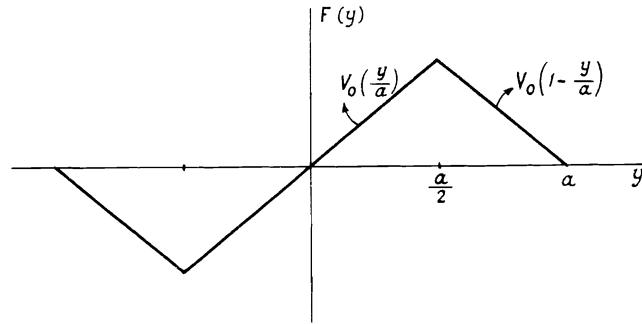


Fig. 5.22

con

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} \frac{V_0}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} dy + \frac{2}{a} \int_{a/2}^a V_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} dy$$

Integrando por partes

$$a_n = \frac{4V_0}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

Como $\operatorname{ch} 0 = 1$, $A_n = a_n$ y sustituyendo en 3

$$\Phi_2 = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} \quad [5]$$

La función potencial es

$$\Phi = \frac{V_0}{a} y + \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} \quad [6]$$

★

COORDENADAS CILINDRICAS

5-9. Repetir el problema 5-3 ensayando una solución producto de funciones de r y φ .

Solución

$$\Phi = R(r) \Psi(\varphi) = (C r^m + D r^{-m})(A \cos m\varphi + B \operatorname{sen} m\varphi)$$

Para $r = R_1$: $\Phi = V_0$

$$V_0 = (C R_1^m + D R_1^{-m}) \Psi(\varphi) \quad [1]$$

Para $r = R_2$: $\Phi = V_0$

$$V_0 = (C R_2^m + D R_2^{-m}) \Psi(\varphi) \quad [2]$$

Para $\varphi = 0$: $\Phi = 0$

$$0 = R(r) A \Rightarrow A = 0$$

Para $\varphi = \pi/2$: $\Phi = 0$

$$0 = R(r) B \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2} \Rightarrow \frac{m\pi}{2} = n\pi, m = 2n$$

$$\Phi = (C' r^{2n} + D' r^{-2n}) \operatorname{sen} 2n\varphi$$

$$V_0 = (C' R_1^{2n} + D' R_1^{-2n}) \operatorname{sen} 2n\varphi = (C' R_2^{2n} + D' R_2^{-2n}) \operatorname{sen} 2n\varphi$$

Ensayemos la solución más general

$$\Phi = \sum_1^{\infty} (C_n r^{2n} + D_n r^{-2n}) \operatorname{sen} 2n\varphi \quad [3]$$

que cumplirá

$$V_0 = \sum_1^{\infty} (C_n R_1^{2n} + D_n R_1^{-2n}) \operatorname{sen} 2n\varphi = \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} 2n\varphi = \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\alpha \quad [4]$$

siendo $\alpha = 2\varphi$. Esta igualdad tiene que cumplirse para $0 < \varphi < \pi/2$. Completamos la función construyendo una función impar en $-\pi < \alpha < \pi$. Su desarrollo en serie de Fourier es [4] y, como hemos visto en problemas anteriores,

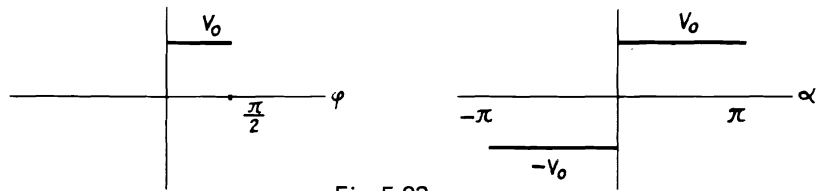


Fig. 5.23

$$b_n = \frac{4V_0}{n\pi}, \quad n \neq 2$$

$$V_0 = \sum_1^{\infty} (C_n R_1^{2n} + D_n R_1^{-2n}) \text{sen } 2n\varphi =$$

$$= \sum_1^{\infty} (C_n R_2^{2n} + D_n R_2^{-2n}) \text{sen } 2n\varphi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \text{sen } n\alpha = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \text{sen } 2n\varphi$$

de donde

$$\begin{cases} C_n R_1^{2n} + D_n R_1^{-2n} = \frac{4V_0}{n\pi} \\ C_n R_2^{2n} + D_n R_2^{-2n} = \frac{4V_0}{n\pi} \end{cases}$$

Resolviendo este sistema

$$\begin{cases} C_n = \frac{4V_0}{n\pi} \frac{1}{R_1^{2n} + R_2^{2n}} \\ D_n = \frac{4V_0}{n\pi} \frac{R_1^{2n} R_2^{2n}}{R_1^{2n} + R_2^{2n}} \end{cases}$$

Sustituyendo en [3]

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{1}{R_1^{2n} + R_2^{2n}} (r^{2n} + R_1^{2n} R_2^{2n} r^{-2n}) \text{sen } 2n\varphi, \quad n \neq 2$$

★

5-10. Repetir el problema 4.31 aplicando el método de separación de variables.

Solución

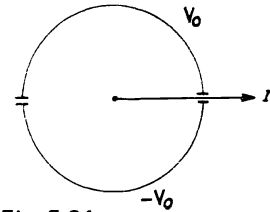


Fig. 5.24

Probamos la solución

$$\Phi = (A r^m + B r^{-m}) (C \text{sen } m\varphi + D \text{cos } m\varphi)$$

Como Φ ha de ser impar en φ , $D = 0$

$$\Phi = A' r^m \text{sen } m\varphi$$

Como esta función sola no puede cumplir las condiciones de contorno, ensayamos

$$\Phi = \sum_1^{\infty} A'_m r^m \text{sen } m\varphi$$

que cumplirá

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \sum_1^{\infty} A'_m r_0^m \text{sen } m\varphi, \quad \text{para } 0 < \varphi < \pi \\ -V_0 &= \sum_1^{\infty} A'_m r_0^m \text{sen } m\varphi, \quad \text{para } -\pi < \varphi < 0 \end{aligned} \right\} [1]$$

La función 1, representada en la figura 5-25, es la descrita por la serie

$$\sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{m\pi} \text{sen } m\varphi, \quad m \neq 2$$

$$A'_m r_0^m = \frac{4V_0}{m\pi} \quad A' = \frac{4V_0}{m\pi r_0^m}$$

Fig. 5.25

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{4V_0}{m\pi} \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \text{sen } m\varphi, \quad \text{con } m \neq 2$$

5-11. Se tiene un cilindro conductor indefinido de radio b a potencial cero. En su interior hay otro, de radio a , partido en cuatro sectores que están conectados a $\pm V_0$ como se indica en la figura 5-26. Hallar la función potencial en el espacio comprendido entre los cilindros.

Solución

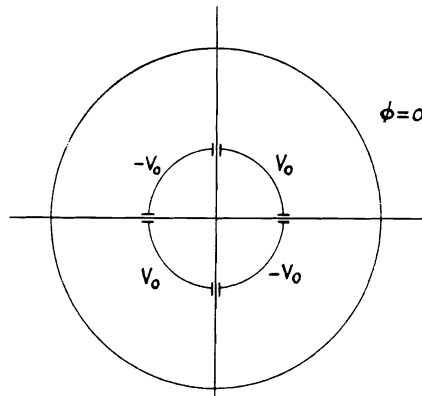


Fig. 5.26

$$\Phi = (A r^n + B r^{-n}) (C \text{ sen } n\varphi + D \text{ cos } n\varphi)$$

Por la forma de las condiciones de contorno, Φ ha de ser impar en φ , luego $D = 0$

$$\Phi = (A r^n + B r^{-n}) \text{ sen } n\varphi \quad [1]$$

En el cilindro exterior, $\Phi = 0$

$$0 = (A b^n + B b^{-n}) \text{ sen } n\varphi$$

de donde

$$A r^n + B r^{-n} = 0, \quad B = -A b^{2n} \quad [2]$$

Ensayamos

$$\Phi = \sum_1^{\infty} A_n (r^n - b^{2n} r^{-n}) \text{ sen } n\varphi \quad [3]$$

Para $r = a$, Φ ha de tener la forma representada en la figura 5-27. Esta función es impar y desarrollable en serie de senos.

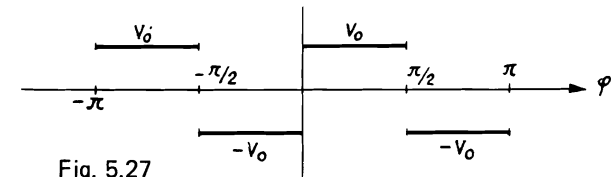


Fig. 5.27

$$F(\varphi) = \sum_1^{\infty} b_n \text{ sen } n\varphi$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi) \text{ sen } n\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} V_0 \text{ sen } n\varphi \, d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} V_0 \text{ sen } n\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi} \left\{ 1 - 2 \cos \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi \right\} = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12 \\ \frac{8V_0}{n\pi} & \text{para } n = 2(2k+1), k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$A_n = \frac{8V_0}{n\pi} \frac{1}{a^n - b^{2n} a^n}$$

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{8V_0}{n\pi} \frac{r^n - b^{2n} r^{-n}}{a^n - b^{2n} a^n} \text{ sen } n\varphi, \quad n = 2(2k+1), k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

5-12. Determinar la función potencial en el interior de un cilindro conductor hueco de radio a dividido en dos partes iguales según un plano transversal y cerrado en sus extremos por bases planas, siendo ℓ la longitud del cilindro y sabiendo que las bases están a potencial cero, que el tramo $0 < z < (\ell/2)$ está a potencial V_0 y el resto a $-V_0$.

Solución

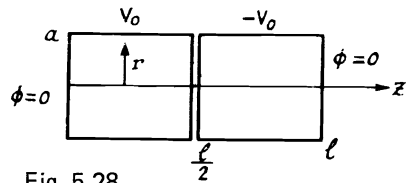


Fig. 5.28

No existe variación con φ . Por haber ceros repetidos en el eje z pondremos funciones circulares de z .

$$\Phi = \left(A I_0(\tau z) + B K_0(\tau z) \right) (C \cos \tau z + D \sin \tau z) \quad [1]$$

Como los puntos $r=0$ están dentro del cilindro y $K_0(0)$ es infinita, $B=0$.

Para que $\Phi=0$ en $z=0$, debe ser $C=0$

Para que $\Phi=0$ en $z=\ell$, debe ser $\tau = \frac{n\pi}{\ell}$

$$\Phi = A I_0(\tau z) \sin \tau z \quad [2]$$

Ensayamos la serie

$$\Phi = \sum_1^{\infty} A_n I_0(\tau r) \sin \tau z \quad [3]$$

$$\sum_1^{\infty} A_n I_0(\tau a) \sin \tau z = \begin{cases} +V_0 & \text{para } 0 < z < (\ell/2) \\ -V_0 & \text{para } (\ell/2) < z < \ell \end{cases}$$

Completamos la función para obtener una impar en $-\ell < z < \ell$

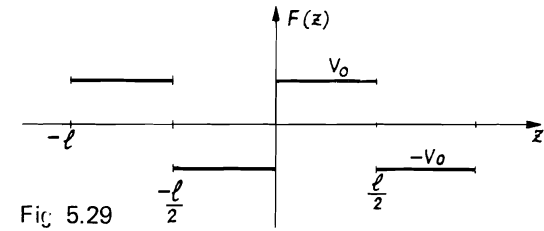


Fig. 5.29

$$F(z) = \sum_1^{\infty} a_n \sin \tau z$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell/2} V_0 \sin \tau z \, dz - \frac{2}{\ell} \int_{\ell/2}^{\ell} V_0 \sin \tau z \, dz =$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi} \left\{ 1 + \cos n\pi - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right\} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{para } n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \frac{8V_0}{n\pi} & \text{para } n = 2(2k+1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{para } n = 4k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

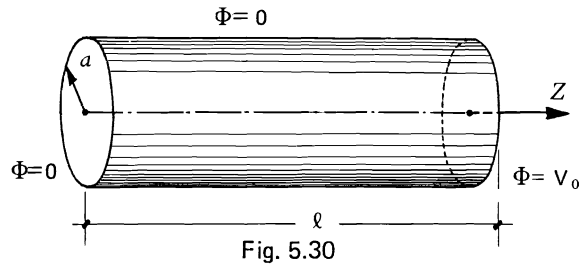
$$A_n = \frac{8V_0}{n\pi} \frac{1}{I_0\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)}$$

$$\Phi = \sum_1^{\infty} \frac{8V_0}{n\pi} \frac{I_0\left(\frac{n\pi r}{\ell}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)} \sin \frac{n\pi z}{\ell}, \quad n = 2(2k+1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

★

5-13. Un cilindro conductor de radio a se encuentra a potencial cero, y dos planos normales a su eje, separados por una distancia ℓ , están conectados a V_0 el uno y a cero volt el otro. Hallar la función potencial en el interior.

Solución



El potencial no depende de φ .

$$\Phi = (A \operatorname{ch} Tz + B \operatorname{sh} Tz) (C J_0 (Tr) + D N_0 (Tr))$$

$$N_0 (0) \rightarrow \infty, \text{ luego } D = 0$$

$$\text{En } z = 0, \Phi = 0, \text{ luego } A = 0$$

$$\Phi = B \operatorname{sh} Tz J_0 (Tr)$$

$$\text{Para } r = a, \Phi = 0$$

$$0 = B \operatorname{sh} Tz J_0 (Ta)$$

de donde Ta tiene que ser raíz de $J_0 : T = \frac{p_n}{a}$

$$\Phi = \sum_1^{\infty} B_n \operatorname{sh} Tz J_0 (Tr)$$

$$V_0 = \sum_1^{\infty} B_n \operatorname{sh} Tl J_0 (Tr) = \sum_1^{\infty} b_n J_0 \left(\frac{p_n}{a} r \right)$$

donde el último miembro es el desarrollo en serie de Bessel de

$$F(r) = V_0, \quad 0 < r < a$$

$$b_n = \frac{2}{a^2 J_1^2 (p_n)} \int_0^a r V_0 J_0 \left(\frac{p_n}{a} r \right) dr$$

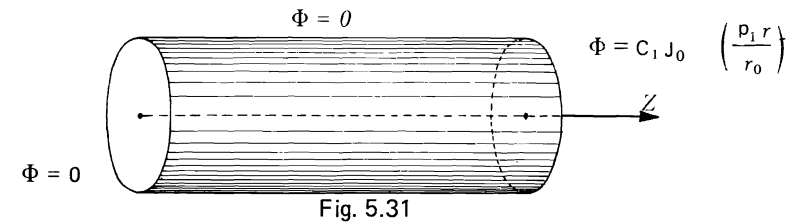
$$\Phi = \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{2 \operatorname{sh} (p_n z/a)}{a^2 \operatorname{sh} (p_n l/a)} \left[\int_0^a r V_0 J_0 \left(\frac{p_n}{a} r \right) dr \right] J_0 \left(\frac{p_n}{a} r \right) \right\}$$

★

5-14. Considérese la región limitada por un cilindro circular a potencial cero y dos planos perpendiculares a su eje a potencial cero uno de ellos y el otro dividido en anillos circulares aislados entre sí, de forma que su potencial puede considerarse representado por

$$\Phi = C_1 J_0 \left(\frac{p_1 r}{r_0} \right)$$

Solución



$$\Phi = (A \operatorname{ch} Tz + B \operatorname{sh} Tz) (C J_0 (Tr) + D N_0 (Tr))$$

Por lo mismo que en el problema anterior,

$$D = A = 0, \quad T = \frac{p_n}{r_0}$$

$$\Phi = B \operatorname{sh} \left(\frac{p_n}{r_0} z \right) J_0 \left(\frac{p_n}{r_0} r \right)$$

En el plano de la derecha

$$C_1 J_0 \left(\frac{\rho_1}{r_0} r \right) = B \operatorname{sh} \left(\frac{\rho_n}{r_0} \ell \right) J_0 \left(\frac{\rho_n}{r_0} r \right)$$

Esta igualdad se cumple solamente si $\rho_n = \rho_1$ y si

$$B = \frac{C_1}{\operatorname{sh}(\rho_1 \ell / r_0)}$$

La solución del potencial es, pues,

$$\Phi = C_1 \frac{\operatorname{sh}(\rho_1 z / r_0)}{\operatorname{sh}(\rho_1 \ell / r_0)} J_0 \left(\frac{\rho_1}{r_0} r \right)$$

★

COORDENADAS ESFERICAS

5-15. Estúdiense el potencial en el interior de una superficie esférica de radio a para cuya superficie se da el potencial mediante una cierta función

$$\Phi \Big|_{r=a} = f(\theta)$$

Solución

Por la forma de la condición de contorno, el potencial no depende de φ . La solución de la ecuación de Laplace en este caso es del tipo

$$\Phi = R(r) \Theta(\theta) = A r^n P_n(\cos \theta) \quad [5.87]$$

Particularizando esta solución para $r = a$ se tiene

$$f(\theta) = A a^n P_n(\cos \theta)$$

relación ésta, que en general, no se cumplirá. Entonces ensayaremos

$$\Phi = \sum_n A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad [1]$$

y el problema quedará resuelto si sabemos desarrollar $f(\theta)$ en serie

$$f(\theta) = \sum_n C_n P_n(\cos \theta) \quad [2]$$

porque entonces $A_n a^n = C_n$, $A_n = C_n / a^n$ y

$$\Phi = \sum_n C_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad [3]$$

Los coeficientes C_n de (2) se calculan basándose en la ortogonalidad de las funciones $P_n(x)$, (expresiones (5.84) y (5.85)).

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\theta) P_m(\cos \theta) d(\cos \theta) &= \sum_n \int_{-1}^1 C_n P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d(\cos \theta) = \\ &= \int_{-1}^1 C_m P_m^2(\cos \theta) d(\cos \theta) = C_m \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

de donde

$$C_m = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\theta) P_m(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

Sustituyendo en [3]

$$\Phi = \sum_n \left[\frac{2n+1}{2} \left\{ \int_{-1}^1 f(\theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta) \right\} \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \right]$$

que es la solución del potencial

★

5-16. Estúdiense la función potencial en una región en la que se conoce el valor del potencial, Φ_{eje} , a lo largo de un eje de simetría. Aplicar las conclusiones obtenidas al caso de una lámina plana circular uniformemente cargada con ρ_s coul/m².

Solución

Tomemos ese eje de simetría como eje polar ($\theta = 0$). Por no haber variación con φ , la solución será del tipo

$$\Phi = \sum_n A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad [1]$$

y como $P_n(\cos \theta) \Big|_{\theta=0} = P_n(\cos \theta) \Big|_{\theta=0} = 1$

$$\Phi_{eje} = \sum_n A_n r^n \quad [2]$$

Trataremos de desarrollar la función Φ_{eje} en serie de potencias de r

$$\Phi_{eje} = \sum_n C_n r^n \quad [3]$$

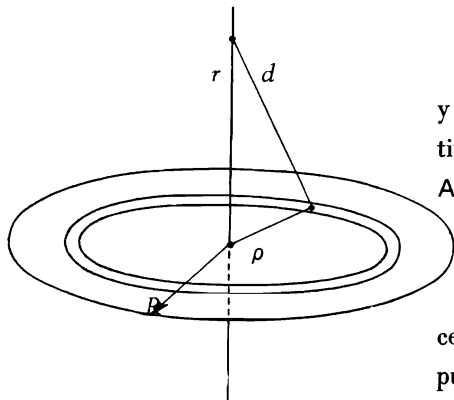


Fig. 5.32

y una vez obtenido el desarrollo, identificaremos [3] con [2] para obtener $A_n = C_n$ y

$$\Phi = \sum_n C_n r^n P_n(\cos \theta) \quad [4]$$

Para el caso de la lámina cargada, necesitamos conocer el potencial en los puntos de su eje. Integrando por anillos concéntricos.

$$d\Phi_{eje} = \frac{2\pi \rho d \rho \rho_s}{4\pi \epsilon d} = \frac{2\pi \rho_s \rho d \rho}{4\pi \epsilon \sqrt{r^2 + \rho^2}}$$

$$\Phi_{eje} = \int_0^R \frac{\rho_s}{2\epsilon} \frac{\rho d \rho}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left\{ \sqrt{r^2 + R^2} - r \right\} \quad [5]$$

Esta es la función que tenemos que desarrollar en serie de potencias de r . Distinguiremos dos casos

a) $r < R$.

$$\begin{aligned} \Phi_{eje} &= \frac{\rho_s}{2\epsilon} R \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2} - \frac{r}{R} \right\} = \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon} R \left\{ 1 - \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

que es una serie convergente

Identificando con [3] resulta el potencial

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\rho_s R}{2\epsilon} \left\{ P_0(\cos \theta) - \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right\} \end{aligned}$$

b) $r > R$ Para esta región no sirve ya la solución [1] porque contiene el punto del infinito. La solución será del tipo

$$\Phi = \sum_n A_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad [6]$$

En el eje

$$\Phi_{eje} = \sum_n A_n r^{-(n+1)} \quad [7]$$

Habrá que desarrollar Φ_{eje} en potencias negativas de r .

$$\begin{aligned}\Phi_{eje} &= \frac{\rho_s}{2\epsilon} r \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{\rho_s r}{2\epsilon} \left\{ 1 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{r}\right)^4 + \dots \right\} = \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon} r \left\{ \frac{1}{2} R^2 r^{-2} + \frac{1}{8} R^4 r^{-4} + \dots \right\} = \\ &= \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} R^2 r^{-(0+1)} + \frac{1}{8} R^4 r^{-(2+1)} + \dots \right\}\end{aligned}$$

que es una serie convergente. Identificando con [7] y sustituyendo en [6]

$$\Phi = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} R^2 r^{-1} P_0(\cos \theta) + \frac{1}{8} R^4 r^{-3} P_2(\cos \theta) + \dots \right\}$$

★

5-17. Est diese por el método de separación de variables, el potencial creado por una carga puntual q situada en un lugar distinto del origen de coordenadas.

Solución

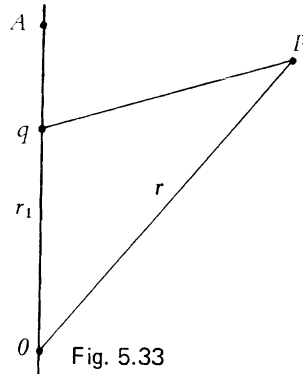


Fig. 5.33

Supongamos que la carga est  en el eje polar, a una distancia r_1 del origen. Como hemos visto en el problema anterior, el potencial en un punto P se expresa fácilmente si conocemos el potencial en el eje y lo desarrollamos en potencias de r .

Potencial en un punto A del eje situado a una distancia r del origen

a) $r < r_1$

$$\begin{aligned}\Phi_{A eje} &= \frac{q}{4\pi \epsilon (r_1 - r)} = \frac{q}{4\pi \epsilon r_1} \frac{1}{1 - \frac{r}{r_1}} = \\ &= \frac{q}{4\pi \epsilon r_1} \left\{ 1 + \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \dots \right\} = \frac{q}{4\pi \epsilon r_1} \sum_n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n\end{aligned}$$

Identificando con

$$\Phi_{eje} = \sum_n C_n r^n$$

se obtiene el potencial en cualquier punto P , $r < r_1$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi \epsilon r_1} \sum_n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

b) $r > r_1$

$$\Phi_{A eje} = \frac{q}{4\pi \epsilon (r - r_1)} = \frac{q}{4\pi \epsilon r} \frac{1}{1 - \frac{r_1}{r}} = \frac{q}{4\pi \epsilon r} \sum_n \left(\frac{r_1}{r}\right)^n$$

de donde

$$\Phi = \frac{q}{4\pi \epsilon r} \sum_n \left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

para $r > r_1$

★