DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Sucesiones y series de funciones. Hoja 10

207 *Sea* $D \neq \emptyset$ *y sea* $\mathcal{L}^{\infty}(D, \mathbb{K})$ *el conjunto de todas las funciones* $f : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$) *acotadas.*
i) Probar que $V = \mathcal{L}^{\infty}(D, \mathbb{K})$ *es un espacio vectorial y que* $\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in D} |f(x)|$ *es una norma en* V.
ii) Usar el problema 45 para construir la métrica en V $d_{\infty}(f, g) = \|f - g\|_{\infty}$. *Describir una bola y describir las sucesiones convergentes a cero en esa métrica.*
iii) Probar que la convergencia en d_{∞} *es la convergencia uniforme.*

208 *Sea* $D \neq \emptyset$ *y* $f_n : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$) *una sucesión de funciones que converge uniformemente a* $f : D \to \mathbb{K}$.
i) Si las funciones f_n *son acotadas, probar que* f *es acotada.*
Recíprocamente, si f *es acotada probar que, excepto quizas una cantidad finita de* $n \in \mathbb{N}$, *todas las funciones* f_n *son acotadas.*
En cualquiera de los dos casos anteriores probar que de hecho existe una consntante $M > 0$ *tal que*

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup\{|f_n(x)|,\ x \in D\} \leq M$$

para todo de $n \in \mathbb{N}$, *excepto quizás una cantidad finita.*
ii) En la situación anterior supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ *es continua. Concluir que* $g \circ f_n$ *converge uniformemente a* $g \circ f$.
iii) Si D *es un espacio métrico y* f *es continua y* $x_n \to x$ *en* D *probar que* $f_n(x_n) \to f(x)$.
Poner ejemplos de que esto es falso si f *no es continua o si sólo hay convergencia puntual.*

209 *Consideremos en el espacio vectorial* $V = C([0, 1])$ *la magnitud*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

i) Probar que $\|\cdot\|_1$ *es una norma, describir una bola para la métrica* $d_1(f, g) = \|f - g\|_1$ *y describir las sucesiones convergentes a cero en esa métrica.*
ii) Probar que si $f_n \to f$ *en* d_1 *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\ dt.$$

iii) Probar que si $f \in V$ *tenemos que* $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty}$. *¿Qué implica esto respecto de la convergencia uniforme de funciones?.*
iv) Construir una sucesion de Cauchy en V *para* d_1 *que no converge a una función continua.*
Indicación: *Construir una sucesion de funciones continuas que, cuando* $n \to \infty$, *desarrolla un salto en* $t_0 = 1/2$.
¿Que le pasa por tanto al espacio (V, d_1)*?.*

210 *Probar que las funciones en* $[0, 1]$, $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ *converge puntualmente pero no uniformemente.*
¿Cómo convergen las funciones $g_n(t) = \frac{t}{nt+1}$*?.*

211 *Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos dados o encontrar intervalos de* $\mathbb{R}$ *en los que la convergencia sea uniforme*
i) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, *ii)* $f_n(t) = \sqrt[n]{t}$, $t \in [0, 1)$, *iii)* $f_n(z) = \frac{z}{n} e^{\frac{-z}{n}}$, *iv)* $f_n(x) = \arctan(nx)$ *en* $[0, 1]$, $[1, \infty)$ *y en* $\mathbb{R}$, *v)* $f_n(t) = \operatorname{sen}(\frac{nt}{1+nt})$ *en* $(0, \infty)$ *y* $[a, \infty)$ *con* $a > 0$, *vi)* $f_n(z) = \frac{nz}{1+n^2 z}$ *en* $[0, \infty)$,
vii) $f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, -\frac{1}{n}] \\ nx & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, \infty) \end{cases}$ *en* $(0, 1)$, $(-3, -1)$ *y en* $\mathbb{R}$.

212 *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 e^{-nx^2}\,dx$$

213 *Supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty$*. Probar que si* $a_0\in\mathbb{R}$ *entonces*

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}(nt)$$

define una función continua en $\mathbb{R}$ *y que además es* 2π*–periódica, es decir* $f(t)=f(t+2\pi)$ *para todo* $t\in\mathbb{R}$*.*

Dar condiciones sobre los coeficientes a_n,b_n *para que* f *sea de clase* C^1*, o clase* C^2*, o clase* C^k*,* $k\in\mathbb{N}$*. Probar que todas esas derivadas son* 2π*–periódicas.*

214 *Probar que* $V=\{f\in C([0,1]),\ \int_0^1 f(t)\,dt=0\}$ *es un subespacio vectorial cerrado del espacio vectorial métrico* $(C([0,1]),d_\infty)$*.*

Idem si $V=\{f\in C([0,1]),\ \int_0^1 f(t)g(t)\,dt=0\}$ *siendo* g *una función continua dada.*

215 *Estudiar la convergencia puntual y encontrar intervalos de* $\mathbb{R}$ *en los que la convergencia sea uniforme*
i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n^2}$*,* *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$*,* *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(t)}{(1+\operatorname{sen}(t))^n}$

216 *Calcular* $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/2}^{1}f_n(t)\,dt$ *siendo* $f_n(t)=\frac{e^t-1}{e^{nt}}$*.*

217 *Supongamos que la serie de potencias* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$*, con* $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *tiene radio de convergencia* $R>0$*.*

Probar que f *es par si y sólo si* $a_{2j+1}=0$*,* $j=0,1,2\dots$ *y que* f *es impar si y sólo si* $a_{2j}=0$*,* $j=0,1,2\dots$*.*

218 *Usando el Problema 138 probar que no existe una cota superior uniforme de todas las derivadas de* $f(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2} & \text{si } t\neq 0\\ 0 & \text{si } t=0\end{cases}$ *en ningun intervalo que contenga a* $t=0$*.*

219 *Encontrar el disco de convergencia de las series de potencias* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$*, con* $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *y* $x_0\in\mathbb{R}$
i) $a_n=\binom{2n}{n}$*,* $x_0=2$*,* *ii)* $a_n=\frac{2^n}{n^2}$*,* $x_0=i$*,* *iii)* $a_n=\frac{3^n}{n4^n}$*,* $x_0=-1$*,* *iv)* $a_n=\frac{(-1)^n}{n^24^n}$*,* $x_0=0$*,* *v)* $a_n=\tan(\frac{a}{2^n})$*,* $x_0=0$*,* *vi)* $a_n=\frac{\ln(n)}{n}$*,* $x_0=2i$

220 *Obtén un desarrollo en serie de potencias centrada en* $x_0=0$ *para las siguientes funciónes*
i) $x\cos(x)$*,* *ii)* $\sin(t^2)$*,* *iii)* z^3e^{2z}*,* *iv)* $\operatorname{senh}(t)+2\cos(3t)$*,* *v)* $(x+2)e^x$ *vi)* $F(t)=\int_0^t e^{-s^2}\,ds$*,* *vii)* $\frac{1}{x-1}+x^2\operatorname{sen}(3x)$*.*

221 *Encontrar el disco de convergencia de las siguientes series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$*,* *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n(3n-1)}$*,* *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n-1)}{n^2+n}x^{n+1}$

222 *Encontrar los coeficientes del desarrollo de una función,* $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$*, que verifica*

$$f''(t)+f(t)=0,\quad f(0)=1,\quad f'(0)=0$$

e identifica esa función.