DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
La integral de Riemann. Hoja 8

156 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada. Si* p, q *son particiones de* $[a,b]$ *y* p *es más fina que* q*, probar que* $S(f,p) \leq S(f,q)$*. Para ello, suponer primero que* p *tiene un punto más que* q *y luego proceder por inducción.*

157 *Dar un ejemplo de una función en* $[0,1]$ *tal que* $|f|$ *es integrable Riemann y* f *no lo es.*

158 *Dar un ejemplo de una función* $f(t) > 0$ *integrable Riemann en* $[0,1]$ *y tal que* $\frac{1}{f}$ *no lo es.*

159 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada. Probar que* f *es integrable Riemann si y sólo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existen* p_1, p_2 *particiones de* $[a,b]$ *tales que*

$$0 \leq S(f,p_1) - s(f,p_2) \leq \varepsilon$$

160 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada y supongamos que* $\{p_N\}_{N=1}^{\infty}$ *es una sucesión de particiones de* $[a,b]$ *tal que*

$$(0 \leq) S(f,p_N) - s(f,p_N) \to 0 \quad \text{con } N \to \infty.$$

Probar que f *es integrable Riemann y que*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} S(f,p_N) = \lim_{N\to\infty} s(f,p_N)$$

161 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrable Riemann,* $t_0 \in (a,b)$ *y* $A \in \mathbb{R}$*. Definimos* $g(t) = \begin{cases} f(t), & t \neq t_0 \\ A, & t = t_0 \end{cases}$

Probar usando particiones que g *es integrable Riemann y que* $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$*.*
Por inducción tratar el caso en que modificamos f *en un conjunto finito de puntos.*

162 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrable Riemann. Definimos la parte positiva y la parte negativa de* f *como*

$$f^+(t) = \frac{f(t) + |f(t)|}{2}, \quad f^-(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2}, \quad t \in [a,b].$$

Probar
i) $f^+(t) \geq 0$, $f^-(t) \geq 0$*, para todo* $t \in [a,b]$ *y son integrables Riemann.*
ii) $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$, $|f|(t) = f^+(t) + f^-(t)$, $f^+(t) \cdot f^-(t) = 0$ *para todo* $t \in [a,b]$*.*
iii) $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f^+(t)\,dt - \int_a^b f^-(t)\,dt$ *y* $\int_a^b |f|(t)\,dt = \int_a^b f^+(t)\,dt + \int_a^b f^-(t)\,dt$
iv) $f^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2$*.*

163 *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(t) \geq 0$ *para todo* $t \in [a,b]$ *y supongamos que*

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0.$$

Probar que $f(t) = 0$ *para todo* $t \in [a,b]$*. Idem si* f *es monótona.*
¿Qué se puede concluir si f *es sólo integrable Riemann?.*

164 *Supongamos que* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua tal que*

$$\int_I f(t)\,dt = 0$$

para todo intervalo abierto $I \subset [a,b]$*. Probar que* $f(t) = 0$ *para todo* $t \in [a,b]$*. Idem si* f *es monótona.*
¿Qué se puede concluir si f *es sólo integrable Riemann?.*

165 *Calcular las derivadas de las funciones* $\int_a^{b(t)} f(r)\,dr$, $\int_{a(t)}^{b} f(r)\,dr$ *y* $\int_{a(t)}^{b(t)} f(r)\,dr$, *supuesto que* f *es continua y* $a(t)$, $b(t)$ *son derivables.*

166 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua y* L *periódica, probar que* $\int_a^{a+L} f(t)\,dt$ *no depende de* $a \in \mathbb{R}$.

167 *Si* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *es par e integrable Riemann, probar que* $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$, *de dos maneras distintas: usando particiones y usando un cambio de variable.*

De la misma manera si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *es impar, probar que* $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

168 *Sea* $f : [a, b] \to [0, \infty)$ *continua y* $M = \sup\{f(t),\ t \in [a, b]\}$. *Probar que*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b f^n(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{n}} = M.$$

169 *Sea* $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ *para* $x > 0$.
i) Usando propiedades de la integral de Riemann probar que L *es continua, derivable, estrictamente creciente,* $L(x) \to \infty$ *cuando* $x \to \infty$, $L(x) \to -\infty$ *cuando* $x \to 0^+$, $L(1) = 0$.
ii) Probar que $L(xy) = L(x) + L(y)$, $L(x^n) = nL(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $L(x^r) = rL(x)$, $r \in \mathbb{Q}$, $L(x^y) = yL(x)$, $y \in \mathbb{R}$.
iii) Concluir que la inversa de L, $L^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *es derivable, verifica* $L^{-1}(t + s) = L^{-1}(t)L^{-1}(s)$ *y usar el Problema 143 para probar que* $L^{-1}(t) = e^t$. *Concluir que* $L(x) = \ln(x)$ *para* $x > 0$.
iv) Probar que $L'(x) = \frac{1}{x}$ *y que por tanto* $L(x) = \ln(x)$ *para* $x > 0$.

170 *Sea* f *una función derivable tal que* $f'(t) = b(t)f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *donde* $b(t)$ *una función continua en* $\mathbb{R}$.

Usando las herramientas del Problema 144 probar que si $f(0) = A$, *entonces* $f(t) = Ae^{B(t)}$ *para cierta función* $B(t)$ *relacionada con* $b(t)$ *y con* $B(0) = 0$.

171 *Calcular las siguientes primitivas:*

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$	*b)* $\displaystyle\int \frac{\log t}{\sqrt{t}}dt$	*c)* $\displaystyle\int tgx sec^2 x dx$
d) $\displaystyle\int \operatorname{sen} z \log(\cos z) dz$	*e)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}dx$	*f)* $\displaystyle\int arctg\sqrt{u}du$
g) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2 - x^2}dx$	*h)* $\displaystyle\int \frac{e^s - 3e^{2s}}{1 + e^s}ds$	*i)* $\displaystyle\int \frac{t}{at + b}dt$
j) $\displaystyle\int sec^6 z dz$	*k)* $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$	*l)* $\displaystyle\int (2t + 1)^8 dt$
m) $\displaystyle\int \frac{a}{x^2 + b^2}dx$	*n)* $\displaystyle\int \frac{z + 1}{z^2 + 4z + 5}dz$	*ñ)* $\displaystyle\int \frac{s}{a^4 + s^4}ds$

$o)\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-x+1}dx$ $\qquad p)\displaystyle\int \frac{e^{4z}+e^z+1}{e^z}dz$ $\qquad q)\displaystyle\int \frac{t}{t^2-4t+1}dt$

$r)\displaystyle\int \sqrt{1+\cos x}dx$ $\qquad s)\displaystyle\int \frac{1}{2s^2-3s+2}ds$ $\qquad t)\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

$u)\displaystyle\int \frac{x^3+2x+4}{x^3+9x}dx$ $\qquad v)\displaystyle\int \log t dt$ $\qquad w)\displaystyle\int \frac{4z^2-2}{(z^2+4)(z^2+9)}dz$

$x)\displaystyle\int t(\log t)^2 dt$ $\qquad y)\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ $\qquad z)\displaystyle\int axe^{bx}dx$

$\alpha)\displaystyle\int \sqrt{z^2-2}dz$ $\qquad \beta)\displaystyle\int t^2\sqrt{t^2-1}dt$ $\qquad \gamma)\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

$\delta)\displaystyle\int \sqrt{2+s^2}ds$ $\qquad \epsilon)\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}dx$ $\qquad \phi)\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

$\lambda)\displaystyle\int z^2\sqrt{1+z^2}dz$ $\qquad \mu)\displaystyle\int \frac{3-x^2}{x}dx$ $\qquad \nu)\displaystyle\int \sqrt{1-t^2}dt$

172 Calcular las siguientes integrales definidas

$a)\displaystyle\int_{-13}^{13}(x+x^3+x^5)\,dx$ $\qquad b)\displaystyle\int_{-10}^{10}(x^2+7x^6)\,dx$ $\qquad c)\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,dx$

$d)\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$ $\qquad e)\displaystyle\int_{-a}^{a} x^8\operatorname{sen}(x)\,dx$ $\qquad f)\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(x)+\operatorname{sen}(x))\,dx$

173 *Probar que* $\int_a^\infty f(t)\,dt$ *es convergente si y sólo sí para todo* $\varepsilon>0$ *existe* $t_0>a$ *tal que para todos* $x,y>t_0$ *se tiene*

$$\Big|\int_x^y f(t)\,dt\Big|<\varepsilon.$$

174 *Supongamos que* $\int_0^\infty f(t)\,dt$ *es convergente.*
i) Probar que si existe $\lim_{t\to\infty} f(t)=c$ *entonces* $c=0$.
ii) Dar un ejemplo en el que $\int_0^\infty f(t)\,dt$ *converge pero no existe* $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
iii) Probar si es cierto, o dar un contraejemplo, que si además $f\geq 0$ *entonces* $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$.

175 *Estudiar la convergencia de las integrales impropias*
i) $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x\,dx$, *ii)* $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$, *iii)* $\displaystyle\int_0^\infty y\cos y\,dy$, *iv)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$, *v)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln s}{(1+s^2)^2}\,ds$,
vi) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dz}{z^4+z^2+1}$, *vii)* $\displaystyle\int_1^\infty x^{-s}\,dx$, *viii)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-a|t|}\,dt$, *ix)* $\displaystyle\int_0^1 t^{-s}\,dt$, *x)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^7+3x+1}$,
xi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$, *xii)* $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ *xiii)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y}{(1+y^2)^2}\,dy$, *xiv)* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$, *xv)* $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{x}\,dx$,
xvi) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, *xvii)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$

176 *Estudiar la convergencia de las integrales impropias*
i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha\geq 0$, *ii)* $\displaystyle\int_1^\infty \operatorname{sen}^2(\frac{1}{t})\,dt$, *iii)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,dx$, *iv)* $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-x^q}\,dx,\ p,q>0$,
v) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t(\log(t))^p}\,dt$, *vi)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\log(x)}{(1+x)^2}\,dx$, *vii)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^p-1}{\log(t)}\,dt$, *viii)* $\displaystyle\int_0^1 \Big(\ln(x)-\ln(1+x)\Big)\,dx$,

ix) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{(1-t)^{1/2}}\,dt$, *x)* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(t^2+t^{-2})}\,dt$, *xi)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,dt$, *xii)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x(x^2-1)^{1/2}}\,dx$, *xiii)* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})\,dx$, *xiv)* $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})\,dx$, *xv)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,dx$, *xvi)* $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$, *xvii)* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\ln(\frac{1}{x})}\,dx$, *xviii)* $\displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^4\,dt$

177 *Estudiar la convergencia de las series*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha e^{-\beta k}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\beta(n)}{n^\alpha}$$

178 *i) Calcular como función de* s

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

para $f(t)=1$, $f(t)=t$, $f(t)=t^n$, $f(t)=e^{at}$, $f(t)=\cos(bt)$, $f(t)=\mathrm{sen}(bt)$.

La función $F(s)$ *se llama* **Transformada de Laplace** *de la función* $f(t)$.

ii) Probar que si f *es integrable Riemann en todo intervalo acotado de* $[0,\infty)$ *y verifica* $|f(t)| \le Me^{at}$ *para* $t \ge 0$, *entonces su transformada de Laplace esta bien definida para* $s > a$.

179 *Para* $s > 0$, *definimos la* **Función Gamma de Euler** *como* $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$.

i) Demuestra que $\Gamma(s)$ *converge para todo* $s > 0$.

ii) Demuestra que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ *para* $s > 0$ *y concluye que* $\Gamma(n+1) = n!$ *para* $n \in I\!N$.