DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Funciones continuas. Hoja 5

92 *Sean* (M,d) *un espacio métrico,* $f: M \to \mathbb{R}$ *una función y* $x_0 \in M$. *Supongamos que existe* $\lim_{x\to x_0} f(x) = m$.
i) Si $m > 0$ *probar que existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$ *se tiene* $f(x) > 0$.
ii) Si $m < 0$ *probar que existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$ *se tiene* $f(x) < 0$.
iii) ¿Se puede deducir algo semejante si $m = 0$*?.*

93 *Calcular los siguientes límites*
i) $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$, *ii)* $\lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2-t^2}{h}$, *iii)* $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$, *iv)* $\lim_{t\to 1} \frac{t-1}{\sqrt{t^2+3}-2}$, *v)* $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$,
vi) $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

94 *Calcular los siguientes límites*
i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, *ii)* $\lim_{z\to\infty} \frac{2z^3}{z^2+1}$, *iii)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$, *iv)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$, *v)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$,
vi) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$, *vii)* $\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$, *viii)* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$, *ix)* $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x+a)}-x$, *x)* $\lim_{t\to\infty} t(\sqrt{t^2+1}-t)$, *xi)* $\lim_{t\to\infty} (t+\sqrt[3]{1-t^3})$

95 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y sean* $f,g : M \to \mathbb{K}$ *funciones, donde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$.
i) Si $x_0 \in M$ *y* f *y* g *son continuas en* x_0 *probar que las siguientes funciones son continuas en* x_0*:*
af *(para todo* $a \in \mathbb{R}$*),* $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ *(supuesto* $g(x_0) \neq 0$*).*
ii) Concluir que el conjunto de funciones continuas de M *en* $\mathbb{K}$*, que denotamos* $C(M,\mathbb{K})$ *es un espacio vectorial.*
iii) Considerando $M = \mathbb{K}$ *probar que los polinomios* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *(*$n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{K}$*) son funciones continuas.*

96 *Sean* (M,d) *un espacio métrico y* $f : M \to \mathbb{R}$ *una función continua.*
i) Si $a \in \mathbb{R}$ *probar que* $\{x \in M,\ f(x) = a\}$ *es cerrado.*
ii) Si $a,b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*, probar que* $\{x \in M,\ a < f(x) < b\}$ *es abierto y* $\{x \in M,\ a \leq f(x) \leq b\}$ *es cerrado. ¿Cual es su frontera?.*
iii) Si $x_0 \in M$ *probar que* $f(x) = dist(x,x_0)$ *es continua ne* M.
Indicación: *Usar el problema 44.*

97 *Sean* (M,d) *un espacio métrico y* $f : M \to \mathbb{R}^n$ *una función, e.d.* $f(x) = (f_1(x), \dots f_n(x))$*, con* $f_i : M \to \mathbb{R}$.
Considerando en $\mathbb{R}^n$ *las métricas equivalentes habituales, probar que* f *es continua si y sólo si* $f_i(x)$ *es continua para todo* $i = 1, \dots, n$.

98 *i) Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $f(x)$ *es racional para todo* $x \in [a,b]$. *¿Qué puede decirse de* f*?.*
ii) Supongamos que $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *y* f *es una función continua en* $[a,b]$ *tal que* $f(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$.
Demostrar que existe $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$.
iii) Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua y que existen los límites,* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
Probar que f *es acotada: existe* $M > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq M$ *para todo* $x \in M$.
iv) Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua y* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$.
Demostrar que existe un $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(c) \geq f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *(un Máximo Absoluto).*
v) Si $I \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo y* $f : I \to \mathbb{R}$ *es continua, probar que* $f(I)$ *es un intervalo.*
Si ademas I *es cerrado y acotado, probar que* $f(I)$ *también. ¿Cuales son los extremos de* $f(I)$*?*

99 *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es* **denso** *en $\mathbb{R}$ si todo intervalo de $\mathbb{R}$ continene un punto de A. Demostrar*
i) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(t) = 0$ para todo $t \in A$ entonces $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
ii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y $f(t) = g(t)$ para todo $t \in A$ entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
iii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in A$ entonces $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

100 *Si $x \in \mathbb{R}$ denotamos $E(x)$ la* **parte entera de** *x, es decir, el mayor entero que no supera a x y consideramos la funcion $f(x) = x - E(x)$.*
i) Encontrar los puntos en los que $f(x)$ es continua y en los que no.
ii) Encontrar el extremo inferior de los valores de $f(x)$ sobre cualquier intervalo que tenga en su interior un número entero.
iii) Encontrar el extremo superior de los valores de $f(x)$ sobre cualquier intervalo que tenga en su interior un número entero.
iv) Discutir si el infimo y/o el supremo de los apartados anteriores se alcanza o no.

101 *Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2 & \text{si } t \text{ es racional} \\ t^2 - 2 & \text{si } t \text{ es irracional} \end{cases}$$

102 *Sea la función*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y estudiar su continuidad.

103 *Justificar que $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$ y deducir que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0 = \operatorname{sen}(0)$.*
Deducir, usando fórmulas trigonométricas que $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

104 *Sea $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, un polinomio.*
i) Probar que si $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = 0$ entonces $P(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Idem si $\lim_{n\to\infty} P(x_n) = 0$ donde x_n es una sucesion tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.
ii) Probar que si P es acotado: $|P(x)| \leq M$ para cierta consntante $M > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $P(x)$ es constante. Idem si la cota es válida sólo para $x > 0$ ó $x < 0$.

105 *Estudia la continuidad de las funciones*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} |\operatorname{sen}(x)| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\frac{1}{x}),\ \alpha > 0$$

y de todas las funciones que aparecen en los Problemas 93 y 94.

106 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.*
i) Probar si $f : I \to \mathbb{R}$ es monótona y $f(I)$ es un intervalo entonces f es continua.
ii) Si además f es estríctamente monótona, probar que existe f^{-1} y que f^{-1} es continua en su domínio.
iii) Probar que una función continua $f : I \to \mathbb{R}$, es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.

107 Logaritmos

Siguiendo las notaciones del Problema 38, sea $a > 0$ y $a \neq 1$.
i) Probar que $f(x) = a^x$ es continua, estrictamente monótona y que su imagen es $(0, \infty)$.
ii) Deducir que f es biyectiva sobre su imagen y que por tanto existe su inversa $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, que se llama **función logaritmo en base** *a y que*

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

es continua, estrictamente monótona y $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

Si $a > 1$ *probar que* $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$.

Si $a < 1$ *probar que* $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$.

iii) Probar que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ *y que* $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$.

Cuando $a = e$ *se escribe* $\ln(x) = \log_e(x)$ *y se llama* **logaritmo Neperiano**.

iii) Deducir que $a = e^{\ln(a)}$ *y que por tanto* $a^x = e^{\ln(a)x}$ *y* $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ *para* $x > 0$.

iv) Deducir que si $a \in I\!R$ *y* $x > 0$, $g(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$ *es continua y monótona en su dominio.*

v) Deducir que si $f(x)$ *es continua y* $a > 0$, *entonces* $a^{f(x)}$ *también lo es. Estudiar la continuidad de* $f(x)^{g(x)}$ *(supuesto* $f(x) > 0$*).*

vi) Hacer el Problema 75 usando las herramientas de este.

108 *Calcular los siguientes límites*

i) $\lim_{x\to 0} (\frac{x+1}{2x+1})^{x^2}$, *ii)* $\lim_{x\to\infty} (\frac{x-1}{x+1})^x$, *iii)* $\lim_{x\to 0} (\frac{2+x}{3-x})^x$, *iv)* $\lim_{t\to\infty} (\frac{t}{t+1})^t$, *v)* $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$,

vi) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$, *vii)* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$, *viii)* $\lim_{x\to 0} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$

109 *Estudia la continuidad de las funciones*

$f(x) = xE(\frac{1}{x})$, $g(x) = (-1)^{E(\frac{1}{x})}$, $h(t) = \frac{1}{1-e^{1/t}}$, $j(t) = t\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{t})$

110 *Demostrar que la ecuación*

$$\mathrm{tg}(x) = x$$

tiene infinitas raices.

111 *Supongamos que* $f : I\!R \to I\!R$ *verifica* $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ *para todo* $\alpha, x \in I\!R$. *Demostrar que* f *es continua en* $I\!R$ *y discutir todas las funciones de este tipo.*

112 *Sea* $f : I\!R \to I\!R$ *continua. Demostrar que su grafo, es decir, el conjunto*

$$G(f) = \{(x, f(x)),\ x \in I\!R\}$$

es cerrado en $I\!R^2$.

Concluir que el conjunto $\{(x,y),\ y > f(x),\ x \in I\!R\}$ *es abierto en* $I\!R^2$. *Idem para* $\{(x,y),\ y < f(x),\ x \in I\!R\}$.

113 *Sea* (M, d) *un espacio métrico y* $I\!K = I\!R$ *ó* $\mathbb{C}$.

i) Una función $f : M \to I\!K$ *es de clase Lipschitz (o Lipschitziana) si existe una constante* $L > 0$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \le Ld(x,y), \quad x, y \in M.$$

Probar que si f *es Lipschitiana entonces* f *es uniformemente continua.*

ii) Una función $f : M \to I\!K$ *es de clase Hölder (o Hölderiana) si existen una constante* $L > 0$ *y* $\alpha \in (0, 1]$ *tales que*

$$|f(x) - f(y)| \le Ld(x,y)^\alpha, \quad x, y \in M.$$

Probar que si f *es Holderiana entonces* f *es uniformemente continua.*

114 Método de la Bisección

Supongamos que $f : [a, b] \to I\!R$ *es continua y* $f(a)f(b) < 0$. *El siguiente procedimiento permite encontrar una solución de* $f(x) = 0$, $x \in (a, b)$.

Definimos $I_1 = [a, b]$. *Tomamos* $c_1 = \frac{a+b}{2}$. *Si* $f(c_1) = 0$ *terminamos. Si no, tomamos* $x_1 \in I_1$ *un punto cualquiera. Dividimos* I_1 *por el punto medio y nos quedamos con una mitad que llamamos* I_2, *en la que* f *tenga signos distintos en lo extremos.*

Por inducción, construido I_n, *tomamos* c_n *su punto medio. Si* $f(c_n) = 0$ *terminamos. Si no, tomamos* $x_n \in I_n$ *un punto cualquiera. Dividimos* I_n *por el punto medio y nos quedamos con una mitad que llamamos* I_{n+1}, *en la que* f *tenga signos distintos en lo extremos.*

Probar que o bien en un número finito de pasos encontramos un cero de f o bien construimos una sucesión $\{x_n\}$ que es de Cauchy y que converge a un número x_0 tal que $f(x_0) = 0$ y además

$$|x_n - x_0| \leq \frac{C}{2^n}.$$