DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Conceptos métricos. Hoja 3

43 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y* $A \subset M$ *un conjunto no vacio. Se llama* **Métrica Inducida** *en* A *a* $d_A(x,y) = d(x,y)$ *para todos* $x,y \in A$.

Probar que (A, d_A) *es un espacio métrico.*

44 *Sea* (M,d) *un espacio métrico. Probar que para todos* $x,y,z \in M$ *se tiene*

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$

45 *Sea* V *un espacio vectorial real. Una* **norma** *en* V *es una aplicación* $\|\cdot\| : V \to I\!R^+ \cup \{0\}$ *tal que*

a) $\|x\| = 0$ *si sy sólo si* $x = 0$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *para todo* $\lambda \in I\!R$ *y* $x \in V$.

c) Propiedad triangular: para todos $x,y \in V$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Probar que si $(V, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces*

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

define una **métrica** *en* V *y por tanto* (V,d) *es un espacio métrico.*

i) Probar que en $I\!R^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ *y* $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ *son normas que definen las métricas* d_1, d_2 *y* d_∞ *respectivamente.*

ii) Sea $x = \{x_n\}_n$ *una sucesión acotada de números reales, es decir, tal que existe* $C > 0$ *tal que* $|x_n| \leq C$ *para todo* $n \in I\!N$.

Probar que el conjunto V *de todas estas sucesiones es un espacio vectorial y que* $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|,\ i = 1, 2 \dots\}$ *es una norma.*

Escribe la distancia entre dos elementos de V *y describe una bola cualquiera del espacio métrico resultante.*

46 *Sea* (M,d) *un espacio métrico. Probar que si* $x,y \in M$ *con* $x \neq y$ *entonces existen* $r_1, r_2 > 0$ *tales que* $B(x,r_1) \cap B(y,r_2) = \emptyset$.

47 *Sea* (M,d) *un espacio métrico. Probar que la unión finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado.*

Mostrar con un ejemplo en $I\!R$ *que la unión infinita de conjuntos acotados no tiene por que ser un conjunto acotado.*

48 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y* $A \subset M$. *Probar que si* $x \in M$ *es un punto de acumulación de* A *entonces para todo* $r > 0$, $B(x,r) \cap A$ *tiene infinitos puntos.*

49 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y* $A \subset M$. *Si* $y \in M$ *definimos* $dist(y,A) = \inf\{d(y,a),\ a \in A\}$.

i) Probar que $\overline{A} = \{y \in M,\ dist(y,A) = 0\}$.

ii) Probar que A *es acotado si y si sólo si* $\overline{A}$ *es acotado y que en ese caso* $diam(A) = diam(\overline{A})$.

iii) Probar que $\partial(A) = \partial(M \setminus A)$.

iv) Probar que A *es cerrado si y sólo si* $A = \overline{A}$.

v) Probar que A *es cerrado si y sólo si* $\partial(A) \subset A$.

vi) Probar que A *es cerrado si y sólo si* A *contiene a todos sus puntos de acumulación.*

vii) Probar que A *es abierto si y sólo si* $\partial(A) \cap A = \emptyset$.

50 *Sea* (M,d) *un espacio métrico. Probar que una sucesión de Cauchy en* M *es acotada.*

51 *Sea* (M,d) *un espacio métrico y* $K \subset M$ *un subconjunto compacto. Si* $y \in M$ *probar que* $dist(y,K) = \inf\{d(y,x),\ x \in K\}$ *se alcanza. Es decir: existe* $x_0 \in K$ *tal que* $dist(y,K) = dist(y,x_0)$

52 *Sea M un conjunto y supongamos que d_1 y d_2 son dos métricas en M que verifican que existen dos constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para todos $x, y \in M$*

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y).$$

Se dice entonces que ambas métricas son **equivalentes**.
i) Demostrar que para todo $x_0 \in M$ y todo $r > 0$ existen $R_1, R_2 > 0$ tales que

$$B_2(x_0, R_1) \subset B_1(x_0, r) \subset B_2(x_0, R_2)$$

donde B_i son bolas en las métricas d_i, $i = 1, 2$.
ii) Concluir que $A \subset M$ es acotado para la métrica d_1 si y sólo si lo es para la métrica d_2.
iii) Concluir que $A \subset M$ es abierto para la métrica d_1 si y sólo si lo es para la métrica d_2. Deducir que $A \subset M$ es cerrado para al métrica d_1 si y sólo si lo es para la métrica d_2.
iv) Probar que una sucesión $\{x_n\} \subset M$ es de Cauchy para la métrica d_1 si y sólo si lo es para la métrica d_2.
v) Probar que una sucesión $\{x_n\} \subset M$ es convergente para la métrica d_1 si y sólo si lo es para la métrica d_2 y, en ese caso, el límite es el mismo.
vi) Concluir que $A \subset M$ es compacto para la métrica d_1 si y sólo si lo es para la métrica d_2.
vii) En $\mathbb{R}^n$ probar que para las métricas $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ y $d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$, se tiene, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \sqrt{n} d_2(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$$

y deduce que las tres métricas son equivalentes.

53 *Sea (M, d) un espacio métrico y K_n, $n \in \mathbb{N}$ una familia de compactos no vacios tales que $K_{n+1} \subsetneq K_n$. Probar que $\cap_{n=1}^\infty K_n \neq \emptyset$.*

Probar lo mismo sólo suponiendo $K_{n+1} \subset K_n$.

54 *Probar que en $\mathbb{R}^n$ con d_1, d_2 o d_∞, el conjunto $C = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, es un conjunto cerrado y acotado.*

55 *Calcular el interior y la adherencia de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y decir si son abiertos, cerrados, compactos.*
$A = \{x < 0,\ \frac{x+7}{3} < 3\}$, $\quad B = \{\frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$, $\quad C = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ *donde* $C_n = \{x \in \mathbb{R}, \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}\}$.

56 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $A_n = \{x \in \mathbb{R},\ x < \frac{1}{n}\}$, $B_n = \{x \in \mathbb{R},\ x > \frac{1}{n}\}$, $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ y $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$.*

Estudiar si A y B son abiertos, cerrados, acotados, compactos. Hallar el interior, la adeherencia, los puntos de acumulación de A y el interior de $A \cup B$.

57 *Determinar el interior y la adherencia de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ y decir si son abiertos, cerrados, acotados y compactos.*
$A = \{(x, y),\ 0 \leq x \leq 1,\ y = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{(x, y),\ y < x^2 + 1\}$, $\quad C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$, $D = \{(x, y),\ x \in A,\ y \in B\}$, *donde A y B son abiertos de $\mathbb{R}$,* $\quad E = \{(x, y),\ x > 0,\ xy \leq 1\}$.

58 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $A_n = \{(x, y),\ y \geq x^n,\ x \geq 0\} \cup \{(2 + \frac{1}{n}, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.*

Estudiar si A_n es abierto, cerrado, acotado y compacto en $\mathbb{R}^2$.

Si $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ determinar el interior, la adherecia y los puntos de acumulación de A.

59 *Sean $A = \{(x, y),\ x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x, y),\ 2 \leq x \leq 3,\ y = 1,\ o\ y = 3\}$, $C = \{x,\ \text{existe } y \in \mathbb{R},\ \text{tal que } (x, y) \in A\}$, $D = \{y,\ \text{existe } x \in \mathbb{R},\ \text{tal que } (x, y) \in A\}$*

Determinar el interior y la adherencia de A, B, C, D y estudiar si son abiertos, cerrados, acotados y compactos.

60 *i) Construir un conjunto en* $\mathbb{R}$ *que tenga exactamente tres puntos de acumulación.*
ii) Construir dos conjuntos A *y* B *en* $\mathbb{R}$ *tales que los conjuntos* $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ *y* $\overline{A \cap B}$ *sean todos distintos.*

61 *Demostrar si son ciertas o falsas las siguientes propiedades para subconjuntos en un espacio métrico* (M, d).
i) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$, *ii)* $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$, *iii)* $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$, *iv)* $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$,