DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Los números reales y la propiedad de supremo. Hoja 2

26 *Probar que si* $A \subset I\!R$ *es acotado superiormente, entonces* $\alpha = \sup(A)$ *se caracteriza por que*
i) α *es una cota superior de* A
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $x \in A$ *tal que* $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
Enunciar y demostrar una propiedad análoga para el infimo de un conjunto.

27 *i) Probar que todo conjunto finito de* $I\!R$ *contiene a su supremo y a su ínfimo.*
ii) Probar que si una cota superior pertenece al conjunto entonces esa cota es el supremo. Demostrar algo semejante para el ínfimo.
Notación: *Cuando el supremo (o el ínfimo) de un conjunto, pertenece al conjunto, se llama* **máximo** *del conjunto (respectivamente,* **mínimo***).*

28 *Demostrar que si* $I\!R^+ = \{x \in I\!R,\ x > 0\}$ *entonces el ínfimo de este conjunto es* 0 *y deducir que si* $|a-b| < \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon > 0$, *entonces* $a = b$.

29 *i) Probar que* $\inf\{\frac{1}{n},\ n \in I\!N\} = 0$ *y que por tanto para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in I\!N$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon).$$

Indicación: *Usar que* $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ *para todo* $n \in I\!N$.
ii) Probar lo mismo para $\{\frac{x}{n},\ n \in I\!N\}$ *con* $x > 0$.
iii) Si $x < 0$, *probar que* $\sup\{\frac{x}{n},\ n \in I\!N\} = 0$ *y que por tanto para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in I\!N$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{x}{n} \in (-\varepsilon, 0).$$

iv) Probar que para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in I\!N$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{(-1)^n}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

30 *Demostrar que si* $a, x, y \in I\!R$, $y > 0$, *verifican*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo $n \in I\!N$, *entonces* $x = a$.

31 *Como consecuencia de la propiedad Arquimediana de* $I\!R$ *probar que*

$$I\!R = \cup_{n \in Z\!\!\!Z} [n, n+1) = \cup_{n \in Z\!\!\!Z} (n, n+1]$$

(unión disjunta dos a dos) y si $x > 0$

$$I\!R = \cup_{n \in Z\!\!\!Z} [nx, (n+1)x) = \cup_{n \in Z\!\!\!Z} (nx, (n+1)x]$$

(unión disjunta dos a dos).

32 *Sean* x *e* y *números reales tales que* $x > 1$, $y > 0$.
i) Demostrar que existe un numero $n \in I\!N$ *tal que*

$$y < x^n$$

Indicación: *Para* $y<1$ *o* $y=1$ *es fácil. Si* $y>1$ *argumentar por reducción al absurdo. En este caso utiliza que si* $0<\varepsilon<x-1$ *entonces para todo* $m\in\mathbb{N}$*, entonces* $x^m+\varepsilon<x^{m+1}$.
ii) Concluye la **Propiedad Arquimediana del producto***: existe un único* $p\in\mathbb{Z}$ *tal que*

$$x^{p-1}\leq y<x^p$$

Indicación: *Para* $y=1$ *es fácil. Para* $y>1$*, usando i), considera el conjunto* $A=\{n\in\mathbb{N},\ y<x^n\}$ *y usa el Buen Orden de* $\mathbb{N}$*. Para* $0<y<1$ *reducelo al caso anterior.*
iii) Concluye qye

$$(0,\infty)=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}[x^{p-1},x^p)$$

(unión disjunta dos a dos).

Modifica ligeramente los argumentos anteriores para probar que

$$(0,\infty)=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}(x^{p-1},x^p]$$

(unión disjunta dos a dos).

33 *Sean* $A,B\subset\mathbb{R}$ *y no vacios y acotados superiormente. Probar que*

$$\sup(A\cup B)=\sup\{\sup(A),\sup(B)\}$$

$$\sup(A\cap B)\leq\text{ínf}\{\sup(A),\sup(B)\}$$

y con un ejemplo muestra que en general no se da "=". Demostrar algo semejante para el ínfimo.

34 *i) Se llama* suma aritmética *de dos conjuntos* $A,B\subset\mathbb{R}$ *al conjunto*

$$A+B=\{x+y,\ x\in A,\ y\in B\}.$$

Demostrar que si A *y* B *estan acotados superiormente entonces* $A+B$ *también y se tiene*

$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B).$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.
ii) Se llama producto aritmético *de dos conjuntos* $A,B\subset\mathbb{R}$ *al conjunto*

$$A.B=\{xy,\ x\in A,\ y\in B\}.$$

Demostrar que si A *y* B *estan acotados superiormente y compuestos de numeros positivos, entonces* $A.B$ *también y se tiene*

$$\sup(A.B)=\sup(A)\sup(B).$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.
iii) Se llama potencia aritmética *del conjunto* $A\subset\mathbb{R}$ *al conjunto* $A^n=\{x^n,\ x\in A,\}$*, con* $n\in\mathbb{N}$ *fijo. ¿Es* A^2 *igual a* $A.A$*?.*

Demostrar que si A *es acotado superiormente y compuesto de numeros positivos, entonces* A^n *también y se tiene*

$$\sup(A^n)=\sup(A)^n.$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.

35 *Si* $x\in\mathbb{R}$*, probar que para todo* $\varepsilon>0$ *existen* $r_1,r_2\in\mathbb{Q}$ *tales que*

$$r_1\in(x-\varepsilon,x),\quad r_2\in(x,x+\varepsilon).$$

Concluir que de hecho hay infinitos números como r_1 *y* r_2*. Hacer lo mismo para números irracionales.*

Concluir que en $\mathbb{Q}$ *y en* $\mathbb{R}$ *no hay un "numero siguiente" ni un "número anterior" a un número dado.*

36 *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
i) Si n es par y $a > 0$ probar que entonces a tiene exactamente dos raices n-ésismas reales, una opuesta de la otra, que representamos por $\pm \sqrt[n]{a}$. Si además $0 \leq a_1 < a_2$ entonces $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$. Si $a < 0$ entonces no tiene raices n-ésismas reales.
ii) Si n es impar y $a \in \mathbb{R}$ probar que a tiene exactamente una raiz n-ésisma real, con el mismo signo que a. Si además $a_1 < a_2$ entonces $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$.

37 Exponentes enteros y racionales
i) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^m = \overbrace{a \cdots a}^{m}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = (\frac{1}{a})^m.$$

Probar que $a^n a^m = a^{n+m}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Probar que $(a^n)^m = a^{nm}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Probar que $(ab)^m = a^m b^m$ para todos $a, b \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$.
ii) Si $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Probar que la definición de $a^{\frac{m}{n}}$ es consistente para todas las fracciones que representan al mismo número racional y por tanto a^r está bien definido para $r \in \mathbb{Q}$.

Probar que $a^r a^s = a^{r+s}$ para todos $r, s \in \mathbb{Q}$ y $a^0 = 1$. Probar que $(ab)^r = a^r b^r$ para todos $a, b \neq 0$ y $r \in \mathbb{Q}$. Probar que $(a^r)^s = a^{rs}$ para todos $r, s \in \mathbb{Q}$.
iii) Si $0 < a < 1$, probar que si $r < s$ entonces $a^r > a^s$ mientras que si $a > 1$ y $r < s$ entonces $a^r < a^s$ para todos $r, s \in \mathbb{Q}$.

38 La exponencial real

Probar que si $x \in \mathbb{R}$ y llamamos $I_x = \{r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$ y $S_x = \{r \in \mathbb{Q},\ r > x\}$ entonces estos conjuntos son no vacios y

$$x = \sup I_x = \text{ínf}\, S_x.$$

Concluir que si $a > 1$ y definimos

$$a^x = \sup\{a^r,\ r \in I_x\}$$

entonces $a^x = \text{ínf}\{a^r,\ r \in S_x\}$ y se tiene $a^x a^y = a^{x+y}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$ y si $x < y$ entonces $a^x < a^y$. Probar que $(a^x)^y = a^{xy}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Si $0 < a < 1$ obtener un resultado semejante definiendo

$$a^x = \text{ínf}\{a^r,\ r \in I_x\}.$$

Prueba que es este caso $a^x = \frac{1}{(a^{-1})^x}$.

39 *Probar que si $A, B \subset \mathbb{R}$ son no vacios y tales que $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$ y $a < b$ para todos $a \in A$, $b \in B$, entonces existe un único número real γ tal que $a \leq \gamma \leq b$ para todos $a \in A$, $b \in B$.*

40 *Determinar los conjuntos*
i) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$, ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$, iv) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$, v) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$, vi) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n, n)$

41 *Hallar el supremo y el infimo de*
i) $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, ii) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$, iii) $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 \geq 0\}$, iv) $\{x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 1 < 0\}$, v) $\{x \in \mathbb{R},\ x < 0,\ x^2 + x + 1 \geq 0\}$, vi) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, vii) $\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m},\ n, m \in \mathbb{N}\}$.

42 *Sea $\{(a_n, b_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ una familia de intervalos en $\mathbb{R}$ y sea $a = \text{ínf}_n\, a_n$, $b = \sup_n b_n$.*
i) Demostrar que $\bigcup_n (a_n, b_n) \subset (a, b)$
ii) Demostrar que si $(a_{n+1}, b_{n+1}) \supset (a_n, b_n)$ entonces $\bigcup_n (a_n, b_n) = (a, b)$
iii) Probar con un ejemplo que si $\alpha = \sup_n a_n$, $\beta = \text{ínf}_n\, b_n$, en general no es cierto que $\bigcap_n (a_n, b_n) = (\alpha, \beta)$ aunque $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$.