DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Conjuntos de números. Hoja 1

1 *Probar la "Propiedad de Buen Orden" de* $\mathbb{N}$*: todo conjunto no vacío tiene un primer elemento.*

2 *i) Demostrar que la ecuación* $x^2 = 2$ *no la satisface ningún número racional.*
ii) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *no es racional.*

3 *Demostrar que si* $r \in \mathbb{Q}$*,* $r \neq 0$ *y* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *entonces* $r + x$ *y* rx *son irracionales.*

4 *Demuestra que en* $\mathbb{R}$ *(o en* $\mathbb{C}$*) el elemento neutro de la suma es único. Demuestra que el opuesto de un número es único.*

Demuestra que el elemento neutro del producto es único y que el inverso de un número es único.

Demuestra que $x \cdot 0 = 0$ *para todo* x *y que si* $x \cdot y = 0$ *entonces* $x = 0$ *ó* $y = 0$*.*

Demuestra que si $x < y$ *y* $a > 0$ *entonces* $ax < ay$*, que si* $0 < a < b$ *entonces* $ax < by$ *y que si* $0 < x$ *entonces* $x^2 < y^2$ *e* $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$*. En particular concluye que si* $0 < x < y$ *entonces* $x^n < y^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

5 *Si* $a > 0$ *demostrar que*
i) Si $a > 1$ *entonces* $1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*
ii) Si $0 < a < 1$ *entonces* $1 > a > a^2 > a^3 > \ldots > a^n$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

¿Qué pasa si $a < 0$*?.*

6 *Demostrar que*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Usando esto, deducir y demostrar una fórmula para la suma de los N *primeros numeros pares y otra para la de los* N *primeros numeros impares.*

7 *Demostrar que*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{M} z^n = \frac{1 - z^{M+1}}{1 - z}, \quad y \quad \sum_{n=N}^{M} z^n = \frac{z^N - z^{M+1}}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \ M > N.$$

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \quad \textit{Binomio de Newton} \quad \left(\textit{con } \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\right).$$

8 *Demuestra que*
i) $n^3 + 5n$ *es divisible por* 6 *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
ii) $2^n < n!$*, si* $n \geq 5$*.*
iii) Desigualdad de Bernoulli: para todo $x > -1$ *se tiene*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad n \in \mathbb{N}$$

9 *¿Para qué numeros naturales se verifica* $n^2 < 2^n$*?.*

10 *Demuestra que*

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2n = \prod_{j=1}^{n} 2j = 2^n n! \qquad y \qquad 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1) = \prod_{j=1}^{n} (2j+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

11 *Demuestra que para todos $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$$

12 *i) Supongamos que una sucesión de números verifica*

$$a_{n+1} = ka_n, \quad a_0 \text{ dado}, \ n = 1, 2 \ldots \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Encuentra y demuestra por inducción una expresión general para a_n.
ii) Idem si

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n}, \quad a_1 \text{ dado}, \ n = 1, 2 \ldots$$

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad a_0, a_1 \text{ dados}, \ n = 1, 2 \ldots.$$

13 *Si*

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad a_0, a_1 \text{ dados}, \ n = 1, 2 \ldots$$

con $0 < a_0, a_1 < 2$, probar que $0 < a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14 *Supongamos que*

$$0 \leq y_{n+1} \leq ky_n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Demostrar que

$$0 \leq y_n \leq k^{n-1} y_1, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

15 *Si $a_1, \ldots, a_n$ son positivos probar que*

$$\Big(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\Big)\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big) \geq n^2$$

16 *Demostrar por inducción en el número de elementos, que todo conjunto finito de $\mathbb{R}$ se puede ordenar de manera creciente.*

17 *Encuentra todos los números reales que verifican*
i) $x^2 = 2x$, *ii)* $x^2 > 3x+4$, *iii)* $1 < x^2 < 4$, *iv)* $\frac{1}{x} < x$, *v)* $\frac{1}{x} < x^2$, *vi)* $|x-1| - |x-2| = 0$, *vii)* $|x| + |x-1| = 1$, *viii)* $|4x-5| < 13$, *ix)* $|x^2-1| = 3$, *x)* $|x-1| > |x+1|$, *xi)* $|x| + |x+1| < 2$.

18 *Demostrar que*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \qquad |zw| = |z||w|, \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

19 *Demostrar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces*

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

y que por tanto el inverso de z es $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Dibuja el inverso.

Probar que en forma polar, si $z = re^{i\theta}$ entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$ y $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

20 *Probar que la exponencial compleja verifica*

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

21 *Calcular las raices complejas de la unidad: $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n = 1$ con $n = 2, 3, 4 \ldots$ y dibujarlas.*

22 *Sean* X *e* Y *son dos conjuntos y* $f : X \to Y$ *una aplicación (o función).*
i) Si $A, B \subset X$ *demostrar que* $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *y que* $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ *pero en general no se da la igualdad en el último caso.*

Si f *es inyectiva, probar que* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$*.*

ii) Generaliza lo anterior para una familia arbitraria de conjuntos $A_i \subset X$, $i \in I$ *(conjunto de indices), probando que*

$$f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i), \qquad f(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$$

y que si f *es inyectiva se da la igualdad en la última expresión.*

23 *Sean* X *e* Y *son dos conjuntos y* $f : X \to Y$ *una aplicación (o función). Si* $C \subset Y$ *definimos la preimagen de* C *por* f *como*

$$f^{-1}(C) = \{x \in X,\ f(x) \in C\} \subset X.$$

Probar que para una familia arbitraria de conjuntos $C_i \subset Y$, $i \in I$ *(conjunto de indices), se tiene*

$$f^{-1}(\cup_{i \in I} C_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(C_i), \qquad f^{-1}(\cap_{i \in I} C_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(C_i)$$

24 *Sea* $A = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\}$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{x}{x-1}$ *para* $x \in A$*.*

Demostar que f *es inyectiva, determinar el rango de* f*:* $R(f) = Im(f) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ f(x) = y\}$ *y calcular la función inversa de* f*.*

25 *Encontrar una aplicación biyectiva entre* $A = \{x \in \mathbb{R},\ 2 < x < 3\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R},\ 5 < x < 10\}$