

Apellidos y nombre:

**Análisis Matemático.**  
**Curso 2016/17**  
**Actividad de aprendizaje 2 (Temas 3, 4 y 5)**

Es condición necesaria entregar esta actividad **COMPLETAMENTE** resuelta (escrita a mano y con el nombre puesto) para poder hacer la prueba de la evaluación continua.

**T3.1**

**Reconoce ecuaciones diferenciales ordinarias, las clasifica y sabe verificar si  $y(x)$  es solución de una EDO.**

Referencias en la Guía Docente: 3.1.

---

**A3.1.1** La siguiente es una ecuación diferencial de primer orden, lineal, no homogénea, con coeficientes constantes:

(a)  $y' = \frac{y}{x} + 3$ .

(b)  $y' + y^2 = \sin(x)$ .

(c)  $y' = y + \sin(x)$ .

Justifica la respuesta correcta e indica por qué las otras opciones son falsas:

---

**A3.1.2** La función  $y(x) = 0$ :

(a) es la única solución de la ecuación diferencial  $y' = y$ .

(b) es la única solución del problema de valor inicial  $y' = y; y(0) = 0$ .

(c) no es solución de ninguna EDO de primer orden.

Justifica la respuesta correcta e indica por qué las otras opciones son falsas:

---

**A3.1.3** La solución de la ecuación diferencial  $y'x = y^2$ , con la condición inicial  $y(1) = 1$ , es:

(a)  $y = 1 - \ln x$ .

(b)  $y = \frac{1}{1 - \ln x}$

(c)  $y = \frac{-1}{\ln x}$ .

Justifica la respuesta correcta e indica por qué las otras opciones son falsas:

---

## T3.2

Resuelve ecuaciones diferenciales de variables separables y lineales de primer orden. Modeliza problemas en términos de EDO's, que resuelve con ayuda del ordenador.

Referencias en la Guía Docente: 3.2.

---

**A3.2.1** Halla la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales (“a mano” y verificando el resultado con MAXIMA):

(a)  $y'y = x^3, y(1) = 1.$

(b)  $y' + 2y = x, y(0) = 0.$

(c)  $y' = \frac{y}{x} + x, y(1) = 1.$

### T3.3

Resuelve ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden 2 con coeficientes constantes. Referencias en la Guía Docente: 3.3.

---

**A3.3.1** Halla la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a)  $y'' + 2y' = 3y, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

(b)  $y'' = -9y - 6y', y(0) = 0, y'(0) = 3.$

(c)  $y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$

### T3.4

**Construye modelos matemáticos para la resolución de problemas.** Referencias en la Guía Docente: Problemas 3.7 a 3.10

---

**A3.4.1 Problema para hacer con MAXIMA:** En un circuito RCL se verifica la ley de Kirchoff  $E = E_L + E_R + E_C$ , siendo  $E(t)$  la fuerza electromotriz y  $E_L$ ,  $E_R$  y  $E_C$  la oposición debida al inductor, la resistencia y el condensador respectivamente. Sabiendo que

$$I = I(t), \quad I(t) = \frac{dQ}{dt}, \quad E_L = L \frac{dI}{dt}, \quad E_R = RI, \quad E_C = \frac{Q}{C}$$

con  $L, R, C$  constantes, se pide

- Expresa  $E = E_L + E_R + E_C$  como una ecuación diferencial lineal de segundo orden para  $Q(t)$ .
- Halla la solución general de dicha ecuación si  $L = 1, R = 2, C = 1, E(t) = 0$ .
- Halla la solución particular para los valores iniciales  $Q(0) = 100, Q'(0) = 0$ . ¿Cómo se comporta  $Q(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito?
- Resuelve la anterior ecuación, manteniendo los valores de  $L, R$  y  $C$  y considerando  $E(t) = 100$ . ¿Cómo se comporta  $Q(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito? ¿Dicho comportamiento depende de los valores iniciales de  $Q(t)$ ?

### A3.4.2 Modelización: crecimiento de poblaciones (de <http://www.zweigmedia.com>):

El modelo de crecimiento de población exponencial consiste en lo siguiente: Sea  $P(t)$  la función que denota la población de una localidad en función del tiempo  $t$ . Entonces, se puede suponer que  $P$  satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) + F,$$

donde  $k$  es una constante de crecimiento y  $F$  representa la ratio neta de inmigración.

- (a) Una región tiene una población inicial de 5 millones de habitantes (5.000 millares de habitantes), una constante de crecimiento  $k = 0.02$  y una ratio neta de inmigración de 20 millares de personas por año. Calcula su población  $P$  (en millares) como una función del tiempo  $t$ , en años.
- (b) Si un país tiene una población inicial de 100 millones de personas, una constante de crecimiento  $k = 0.01$  y una ratio neta de inmigración de  $-0.4$  millones de personas por año, calcula su población  $P$  (en millones) como una función del tiempo  $t$ , en años.
- (c) La ratio de inmigración necesita ser variable, para que el modelo sea mejor. Supongamos que el país tiene una población inicial de 5.000 millares de personas, una constante de crecimiento  $k = 0.02$  y una ratio de inmigración variable  $F(t) = 10 \cdot e^{0.01t}$  miles de personas por año, calcula su población  $P$  (en millares) como una función del tiempo  $t$ , en años.
- (d) Da una interpretación, en lenguaje natural, del modelo. Explica qué significa un valor negativo de  $F$ .

## **T4.1**

**Maneja con soltura las propiedades básicas de sucesiones definidas de modo explícito.**

Referencias en la Guía Docente: 4.0.

---

**A4.1.1** Escribe las definiciones de los siguientes conceptos:

(a) Sucesión acotada.

(b) Sucesión monótona.

(c) Sucesión convergente.

**A4.1.2** Establece relaciones entre los conceptos anteriores y da contraejemplos para las relaciones que no se verifiquen.

**A4.1.3** Completa el siguiente cuadro para cada una de las sucesiones de la primera columna, indicando:

- en *monotonía*: si es creciente, decreciente o no es monótona
- en *acotación*: si es acotada, o sólo acotada superior o inferiormente, o no acotada (indicar, en caso de que existan, cotas superior y/o inferior).
- en *convergencia*: el valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  o especificar que no existe

$a_n$	Monotonía	Acotación	Convergencia
$2^n$			
$\left(-\frac{1}{e}\right)^n$			
$\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)^n$			
$(-3)^n$			
$-3^n$			
$2^{-n}$			
$\frac{n + \cos(n)}{n}$			
$\text{sen}(n)$			
$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$			

**A4.1.2** Sea  $a_n$  una sucesión de números reales tal que  $a_n \leq 2(-1)^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se puede asegurar que:

- (a)  $a_n$  no está acotada.
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .
- (c)  $a_n$  está acotada superiormente.

Justificar la respuesta:

---

## T4.2

**Calcula límites de sucesiones definidas de forma explícita y deduce propiedades sobre el comportamiento de la sucesión a partir del valor de su límite.**

Referencias en la Guía Docente: 4.0 y 4.1

---

**A4.2.1** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  se puede asegurar que

- (a)  $a_n$  es monótona.
- (b)  $a_n$  es positiva.
- (c) Existe un término de la sucesión a partir del cual todos los  $a_n$  están en el intervalo  $(1, 3)$ .

Justificar la respuesta:

---

**A4.2.2** La sucesión  $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} \operatorname{sen}(n^n)}{n}$

- (a) Converge a cero.
- (b) Es acotada pero no es convergente.
- (c) Es divergente y no está acotada.

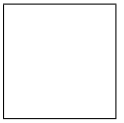
Justificar la respuesta:

---



**A4.2.3** La sucesión  $a_n = \frac{n \cos(n^2)}{2n^2 - n}$

- (a) Converge a cero.
- (b) Es acotada pero no es convergente.
- (c) Es divergente y no está acotada.



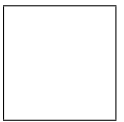
---

Justifica la respuesta:

---

**A4.2.4** Si  $b_n$  es una sucesión acotada, se puede asegurar que  $a_n = b_n \cdot c_n$  converge cuando:

- (a) La sucesión  $c_n$  está acotada.
- (b) La sucesión  $c_n$  es convergente.
- (c) La sucesión  $1/c_n$  tiende a infinito.



---

Pon un contraejemplo de cada una de las proposiciones falsas:

---

### T4.3

**Utiliza la regla del sandwich para calcular límites.** Referencias en la Guía Docente: 4.1

---

**A4.3.1** Enuncia con precisión la regla del sandwich y utilízala para demostrar el siguiente resultado: dadas  $a_n$  y  $b_n$  sucesiones de números reales tales que  $|b_n| \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , entonces se puede asegurar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . ¿Qué se puede asegurar si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ?

**A4.3.2** Se considera la sucesión  $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$ . Entonces:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

---

Justifica la respuesta:

---

**A4.3.3** Se considera la sucesión  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+2n}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+n^2}}$ . Entonces:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

---

Justifica la respuesta:

## T4.4

**Utiliza las propiedades de las sucesiones definidas en forma recursiva.** Referencias en la Guía Docente: 4.0 y 4.1

---

**A4.4.1** En un lejano país, acuciado por el desempleo, el gobierno decidió tomar medidas, que entraron en vigor al comenzar el año 2013. En ese momento había en el país 5 millones de parados. A partir de entonces, como consecuencia de las medidas del gobierno, cada año un 10% de los parados del año anterior encuentra trabajo. Sin embargo, debido a la situación económica, cada año se pierden 300 000 puestos de trabajo.

Si  $P_n$  es el número de millones de parados en ese país al cabo de  $n$  años (a partir de enero de 2017), se pide:

- (a) Dar una expresión recursiva para la sucesión  $P_n$ .
- (b) ¿Cuántos parados habrá en enero de 2015?
- (c) Demostrar por inducción que  $P_n$  es una sucesión monótona, acotada inferiormente por 3.
- (d) ¿Habrá alguna vez menos de 2 millones de parados en dicho país? Calcular el límite de la sucesión.

**A4.4.2** Estudia la convergencia y calcula el límite de la siguiente sucesión: 
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 2a_n} \end{cases} \text{ si } n \geq 1$$

## T4.5

**Determina órdenes de magnitud. Compara órdenes de magnitud de diferentes sucesiones y lo aplica al estudio de complejidad de algoritmos.**

Referencias en la Guía Docente: 4.2

---

**A4.5.1. Teoría** Define los conceptos de  $a_n \sim b_n$  y  $a_n \ll b_n$ . Pon ejemplos de dos sucesiones  $a_n$  y  $b_n$  tales que  $a_n \ll n \log(n) \ll b_n$

**A4.5.2** El orden de magnitud de la sucesión  $a_n = \frac{n^{3/2} \ln(n^2)}{\sqrt{n \ln n}}$  es:

- (a)  $n^2 \ln n$ .
- (b)  $n \ln n$ .
- (c)  $n(\ln(n))^{1/2}$ .

---

Justifica la respuesta, indicando las propiedades usadas:

---

**A4.5.3** Si las sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$  verifican  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ , entonces

- (a)  $a_n \sim b_n$ .
- (b)  $b_n \ll a_n$ .
- (c) No se puede asegurar ninguna de las anteriores.

---

¿Por qué?

---

**A4.5.4** Escribe la jerarquía de infinitos. Asegúrate de que sabes demostrar todas las relaciones y escribe la demostración que te resulte más complicada.

**A4.5.5** Escribe la definición de  $a_n \in O(b_n)$  y demuestra que si  $a_n \ll b_n$  entonces  $a_n + b_n \in O(b_n)$

**A4.5.6** Dadas las sucesiones:

$$a_n = \frac{n + 2^{-n}}{\ln(n^n)}, \quad b_n = \frac{2^n + n^2}{(n^2 + \frac{1}{n})}, \quad c_n = \frac{(n+3)!}{3^n + n!}, \quad d_n = \frac{(n+2)!}{1+n^2}, \quad e_n = 2^n + n^4 \operatorname{sen}(n)$$

- (a) Determina sus órdenes de magnitud
- (b) Ordénalas de menor a mayor magnitud
- (c) Indica cuáles de ellas están en  $O(1)$ , cuáles en  $O(n^3)$ , cuáles en  $O(e^n)$  y cuáles en ninguno de ellos.

**A4.5.7** Los costes de procesar  $n$  datos con dos procedimientos diferentes vienen dados respectivamente por  $(x_n)$  e  $(y_n)$  donde

$$x_n = \frac{2^n}{n^3 + 1} + \frac{2^n}{n^3 + 2} + \frac{2^n}{n^3 + 3} + \cdots + \frac{2^n}{n^3 + n} \qquad y_n = 2^n \left( \frac{2 + (-1)^n}{n} \right)$$

- (a) Usa la regla del sandwich para demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .
- (b) Justifica que  $x_n \in O\left(\frac{2^n}{n^2}\right)$ .
- (c) Compara el orden magnitud de  $y_n$  con el de  $\frac{2^n}{n^2}$ .
- (d) ¿Cuál de los dos procedimientos es más adecuado para valores grandes de  $n$ ? Justifica la respuesta.

## T5.1

**Reconoce el tipo de ecuación en diferencias, sabe lo que es una solución y en algunos casos la resuelve.** Referencias en la Guía Docente: 5.1, 5.2 y 5.3

---

**A5.1.1** La ecuación en diferencias  $x_{n+2} = (n+2)x_{n+1}$  es:

- (a) De segundo orden, lineal, homogénea, de coeficientes constantes.  
(b) De primer orden, lineal, de coeficientes constantes.  
(c) De primer orden, lineal, homogénea.

¿Por qué?

---

**A5.1.2** La solución de la ecuación en diferencias  $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = \frac{n+1}{2}a_{n-1}, \quad n > 1 \end{cases}$  es:

(a)  $a_n = \frac{(n+1)!}{2^n} \cdot 5.$

(b)  $a_n = \frac{(n+1)^n}{2^n} \cdot 5.$

(c)  $a_n = \frac{(2n+1)!}{2^n} \cdot \frac{10}{3}.$

Justifica la respuesta:

---

**A5.1.3** La ecuación en diferencias  $x_{n+1} = x_n + n + 1$  con  $x_0 = 1$  tiene como solución:

(a)  $x_n = \frac{n(n+1)}{2}.$

(b)  $x_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$

(c)  $x_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$

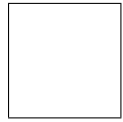
Justifica la respuesta:

---



**A5.1.4** La solución de la ecuación en diferencias  $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 1 \end{cases}$  si  $n \geq 0$ , es:

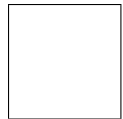
- (a)  $2(n+1) - 1$
- (b)  $2^n$
- (c)  $2^{n+1} - 1$



Comprobación:

**A5.1.5** La sucesión recurrente  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = 1 - x_{n-1} \end{cases}$  si  $n \geq 2$ . verifica

- (a)  $x_n \sim 1$ .
- (b)  $x_n \in O(1)$ , pero  $a_n \not\sim 1$ .
- (c) No se puede asegurar ninguna de las afirmaciones anteriores



Justifica la respuesta:

**A5.1.6** Resuelve las siguientes ecuaciones en diferencias e indica si las sucesiones correspondientes están en  $O(n)$

$$\begin{cases} x_1 = 1/2, \\ x_{n+1} = \frac{n}{2}x_n \end{cases} \quad n \geq 1, \quad \begin{cases} y_0 = 1, \\ y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2^{n+1}} \end{cases} \quad n \geq 0, \quad \begin{cases} z_1 = 0, \quad z_2 = 6 \\ z_n = 2z_{n-1} - z_{n-2} \end{cases} \quad n \geq 3.$$

**A5.1.7** Compara el orden de magnitud de las sucesiones siguientes, resolviendo previamente las ecuaciones en diferencias correspondientes.

$$\begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 0 \\ x_{n+2} - 2x_{n+1} = 3x_n & n \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 0, & y_2 = -2 \\ y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

**A5.1.8** Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es  $n \geq 2$ , usa  $4n$  instrucciones para reducir el problema a dos problemas de  $n - 1$  datos y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Un segundo algoritmo resuelve el mismo problema con un número de instrucciones  $x_n$  tal que  $x_n - x_{n-2} = 2^n$ , con  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 3$ . Calcula con Maxima el número de instrucciones por ambos métodos para  $n = 10^3$  y para  $n = 10^6$  e indica el orden de cada algoritmo. ¿Cuál te parece más adecuado?