**Apellidos y nombre:**

# Análisis Matemático.
# Curso 2016/17
# Actividad de aprendizaje 2 (Temas 3, 4 y 5)

Es condición necesaria entregar esta actividad **COMPLETAMENTE** resuelta (escrita a mano y con el nombre puesto) para poder hacer la prueba de la evaluación continua.

## T3.1

**Reconoce ecuaciones diferenciales ordinarias, las clasifica y sabe verificar si y(x) es solución de una EDO.**

Referencias en la Guía Docente: 3.1.

---

**A3.1.1** La siguiente es una ecuación diferencial de primer orden, lineal, no homogénea, con coeficientes constantes:

(a) $y' = \dfrac{y}{x} + 3$.

(b) $y' + y^2 = \sin(x)$.

(c) $y' = y + \sin(x)$.

---

Justifica la respuesta correcta e indica por qué las otras opciones son falsas:

---

**A3.1.2** La función $y(x) = 0$:

(a) es la única solución de la ecuación diferencial $y' = y$.

(b) es la única solución del problema de valor inicial $y' = y; y(0) = 0$.

(c) no es solución de ninguna EDO de primer orden.

---

Justifica la respuesta correcta e indica por qué las otras opciones son falsas:

---

**A3.1.3** La solución de la ecuación diferencial $y'x = y^2$, con la condición inicial $y(1) = 1$, es:

(a) $y = 1 - \ln x$.

(b) $y = \dfrac{1}{1 - \ln x}$

(c) $y = \dfrac{-1}{\ln x}$.

---

Justifica la respuesta correcta e indica por qué las otras opciones son falsas:

---

## T3.2

**Resuelve ecuaciones diferenciales de variables separables y lineales de primer orden. Modeliza problemas en términos de EDO's, que resuelve con ayuda del ordenador.**

Referencias en la Guía Docente: 3.2.

---

**A3.2.1** Halla la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales ("a mano" y verificando el resultado con MAXIMA):

(a) $y'y = x^3, y(1) = 1$.

(b) $y' + 2y = x, y(0) = 0$.

(c) $y' = \dfrac{y}{x} + x, y(1) = 1$.

## T3.3

**Resuelve ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden 2 con coeficientes constantes.** Referencias en la Guía Docente: 3.3.

---

**A3.3.1** Halla la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' + 2y' = 3y, y(0) = 1, y'(0) = 2$.

(b) $y'' = -9y - 6y', y(0) = 0, y'(0) = 3$.

(c) $y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5$.

## T3.4

**Construye modelos matemáticos para la resolución de problemas.** Referencias en la Guía Docente: Problemas 3.7 a 3.10

---

**A3.4.1 Problema para hacer con** MAXIMA: En un circuito RCL se verifica la ley de Kirchoff $E = E_L + E_R + E_C$, siendo $E(t)$ la fuerza electromotriz y $E_L$, $E_R$ y $E_C$ la oposición debida al inductor, la resistencia y el condensador respectivamente. Sabiendo que

$$I = I(t), \quad I(t) = \frac{dQ}{dt}, \quad E_L = L\frac{dI}{dt}, \quad E_R = RI, \quad E_C = \frac{Q}{C}$$

con $L, R, C$ constantes, se pide

(a) Expresa $E = E_L + E_R + E_C$ como una ecuación diferencial lineal de segundo orden para $Q(t)$.

(b) Halla la solución general de dicha ecuación si $L = 1, R = 2, C = 1, E(t) = 0$.

(c) Halla la solución particular para los valores iniciales $Q(0) = 100, Q'(0) = 0$. ¿Cómo se comporta $Q(t)$ cuando $t$ tiende a infinito?

(d) Resuelve la anterior ecuación, manteniendo los valores de $L, R$ y $C$ y considerando $E(t) = 100$. ¿Cómo se comporta $Q(t)$ cuando $t$ tiende a infinito? ¿Dicho comportamiento depende de los valores iniciales de $Q(t)$?

**A3.4.2 Modelización: crecimiento de poblaciones (de http://www.zweigmedia.com):** El modelo de crecimiento de población exponencial consiste en lo siguiente: Sea $P(t)$ la función que denota la población de una localidad en función del tiempo $t$. Entonces, se puede suponer que $P$ satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) + F,$$

donde $k$ es una constante de crecimiento y $F$ representa la ratio neta de inmigración.

(a) Una región tiene una población inicial de 5 millones de habitantes (5.000 millares de habitantes), una constante de crecimiento $k = 0.02$ y una ratio neta de inmigración de 20 millares de personas por año. Calcula su población $P$ (en millares) como una función del tiempo $t$, en años.

(b) Si un país tiene una población inicial de 100 millones de personas, una constante de crecimiento $k = 0.01$ y una ratio neta de inmigración de $-0.4$ millones de personas por año, calcula su población $P$ (en millones) como una función del tiempo $t$, en años.

(c) La ratio de inmigración necesita ser variable, para que el modelo sea mejor. Supongamos que el país tiene una poblacion inicial de 5.000 millares de personas, una constante de crecimiento $k = 0.02$ y una ratio de inmigración variable $F(t) = 10 \cdot e^{0.01t}$ miles de personas por año, calcula su población $P$ (en millares) como una función del tiempo $t$, en años.

(d) Da una interpretación, en lenguaje natural, del modelo. Explica qué significa un valor negativo de $F$.

## T4.1

**Maneja con soltura las propiedades básicas de sucesiones definidas de modo explícito.**
Referencias en la Guía Docente: 4.0.

---

**A4.1.1**Escribe las definiciones de los siguientes conceptos:

(a) Sucesión acotada.

(b) Sucesión monótona.

(c) Sucesión convergente.

**A4.1.2** Establece relaciones entre los conceptos anteriores y da contraejemplos para las relaciones que no se verifiquen.

**A4.1.3** Completa el siguente cuadro para cada una de las sucesiones de la primera columna, indicando:

- en *monotonía*: si es creciente, decreciente o no es monótona
- en *acotación*: si es acotada, o sólo acotada superior o inferiormente, o no acotada (indicar, en caso de que existan, cotas superior y/o inferior).
- en *convergencia*: el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$ o especificar que no existe

| $a_n$ | Monotonía | Acotación | Convergencia |
|---|---|---|---|
| $2^n$ | | | |
| $\left(-\frac{1}{e}\right)^n$ | | | |
| $\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)^n$ | | | |
| $(-3)^n$ | | | |
| $-3^n$ | | | |
| $2^{-n}$ | | | |
| $\frac{n+\cos(n)}{n}$ | | | |
| $\operatorname{sen}(n)$ | | | |
| $\frac{n^2-1}{n^2+1}$ | | | |

**A4.1.2** Sea $a_n$ una sucesión de números reales tal que $a_n \leq 2(-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se puede asegurar que:

(a) $a_n$ no está acotada.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

(c) $a_n$ está acotada superiormente.

Justificar la respuesta:

## T4.2

**Calcula límites de sucesiones definidas de forma explícita y deduce propiedades sobre el comportamiento de la sucesión a partir del valor de su límite.**

Referencias en la Guía Docente: 4.0 y 4.1

**A4.2.1** Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ se puede asegurar que

(a) $a_n$ es monótona.

(b) $a_n$ es positiva.

(c) Existe un término de la sucesión a partir del cual todos los $a_n$ están en el intervalo $(1, 3)$.

Justificar la respuesta:

**A4.2.2** La sucesión $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}\,\operatorname{sen}(n^n)}{n}$

(a) Converge a cero.

(b) Es acotada pero no es convergente.

(c) Es divergente y no está acotada.

Justificar la respuesta:

**A4.2.3** La sucesión $a_n = \dfrac{n\cos(n^2)}{2n^2 - n}$

(a) Converge a cero.

(b) Es acotada pero no es convergente.

(c) Es divergente y no está acotada.

Justifica la respuesta:

**A4.2.4** Si $b_n$ es una sucesión acotada, se puede asegurar que $a_n = b_n \cdot c_n$ converge cuando:

(a) La sucesión $c_n$ está acotada.

(b) La sucesión $c_n$ es convergente.

(c) La sucesión $1/c_n$ tiende a infinito.

Pon un contraejemplo de cada una de las proposiciones falsas:

## T4.3

**Utiliza la regla del sandwich para calcular límites.** Referencias en la Guía Docente: 4.1

**A4.3.1** Enuncia con precisión la regla del sandwich y utilízala para demostrar el siguiente resultado: dadas $a_n$ y $b_n$ sucesiones de números reales tales que $|b_n| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces se puede asegurar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. ¿Qué se puede asegurar si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$?

**A4.3.2** Se considera la sucesión $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{n^3+2}} + ... + \dfrac{n}{\sqrt{n^3+n}}$. Entonces:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

---

Justifica la respuesta:

---

**A4.3.3** Se considera la sucesión $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+n}} + \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+2n}} + ... + \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3+n^2}}$. Entonces:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

---

Justifica la respuesta:

---

## T4.4

**Utiliza las propiedades de las sucesiones definidas en forma recursiva.** Referencias en la Guía Docente: 4.0 y 4.1

---

**A4.4.1** En un lejano país, acuciado por el desempleo, el gobierno decidió tomar medidas, que entraron en vigor al comenzar el año 2013. En ese momento había en el país 5 millones de parados. A partir de entonces, como consecuencia de las medidas del gobierno, cada año un 10% de los parados del año anterior encuentra trabajo. Sin embargo, debido a la situación económica, cada año se pierden 300 000 puestos de trabajo.

Si $P_n$ es el número de millones de parados en ese país al cabo de $n$ años (a partir de enero de 2017), se pide:

(a) Dar una expresión recursiva para la sucesión $P_n$.

(b) ¿Cuántos parados habrá en enero de 2015?

(c) Demostrar por inducción que $P_n$ es una sucesión monótona, acotada inferiormente por 3.

(d) ¿Habrá alguna vez menos de 2 millones de parados en dicho país? Calcular el límite de la sucesión.

**A4.4.2** Estudia la convergencia y calcula el límite de la siguiente sucesión: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+2a_n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

## T4.5

**Determina órdenes de magnitud. Compara órdenes de magnitud de diferentes sucesiones y lo aplica al estudio de complejidad de algoritmos.**

Referencias en la Guía Docente: 4.2

---

**A4.5.1. Teoria** Define los conceptos de $a_n \sim b_n$ y $a_n \ll b_n$. Pon ejemplos de dos sucesiones $a_n$ y $b_n$ tales que $a_n \ll n\log(n) \ll b_n$

**A4.5.2** El orden de magnitud de la sucesión $a_n = \dfrac{n^{3/2}\ln(n^2)}{\sqrt{n \ln n}}$ es:

(a) $n^2 \ln n$.

(b) $n \ln n$.

(c) $n\big(\ln(n)\big)^{1/2}$.

---

Justifica la respuesta, indicando las propiedades usadas:

---

**A4.5.3** Si las sucesiones $(a_n)$ y $(b_n)$ verifican $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$, entonces

(a) $a_n \sim b_n$.

(b) $b_n \ll a_n$.

(c) No se puede asegurar ninguna de las anteriores.

---

¿Por qué?

---

**A4.5.4** Escribe la jerarquía de infinitos. Asegúrate de que sabes demostrar todas las relaciones y escribe la demostración que te resulte más complicada.

**A4.5.5** Escribe la definición de $a_n \in O(b_n)$ y demuestra que si $a_n \ll b_n$ entonces $a_n + b_n \in O(b_n)$

**A4.5.6** Dadas las sucesiones:

$$a_n = \frac{n + 2^{-n}}{\ln(n^n)}, \quad b_n = \frac{2^n + n^2}{(n^2 + \frac{1}{n})} \quad c_n = \frac{(n+3)!}{3^n + n!} \quad d_n = \frac{(n+2)!}{1 + n^2} \quad e_n = 2^n + n^4 \operatorname{sen}(n)$$

(a) Determina sus órdenes de magnitud

(b) Ordénalas de menor a mayor magnitud

(c) Indica cuáles de ellas están en $O(1)$, cuáles en $O(n^3)$, cuáles en $O(e^n)$ y cuáles en ninguno de ellos.

**A4.5.7** Los costes de procesar $n$ datos con dos procedimientos diferentes vienen dados respectivamente por $(x_n)$ e $(y_n)$ donde

$$x_n = \frac{2^n}{n^3+1} + \frac{2^n}{n^3+2} + \frac{2^n}{n^3+3} + \cdots + \frac{2^n}{n^3+n} \qquad\qquad y_n = 2^n \left( \frac{2+(-1)^n}{n} \right)$$

(a) Usa la regla del sandwich para demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(b) Justifica que $x_n \in O\left(\frac{2^n}{n^2}\right)$.

(c) Compara el orden magnitud de $y_n$ con el de $\frac{2^n}{n^2}$.

(d) ¿Cuál de los dos procedimientos es más adecuado para valores grandes de $n$? Justifica la respuesta.

## T5.1

**Reconoce el tipo de ecuación en diferencias, sabe lo que es una solución y en algunos casos la resuelve.** Referencias en la Guía Docente: 5.1, 5.2 y 5.3

---

**A5.1.1** La ecuación en diferencias $x_{n+2} = (n+2)x_{n+1}$ es:

(a) De segundo orden, lineal, homogénea, de coeficientes constantes.

(b) De primer orden, lineal, de coeficientes constantes.

(c) De primer orden, lineal, homogénea.

---

¿Por qué?

---

**A5.1.2** La solución de la ecuación en diferencias $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = \dfrac{n+1}{2} a_{n-1}, \quad n > 1 \end{cases}$ es:

(a) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n} \cdot 5.$

(b) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{2^n} \cdot 5.$

(c) $a_n = \dfrac{(2n+1)!}{2^n} \cdot \dfrac{10}{3}.$

---

Justifica la respuesta:

---

**A5.1.3** La ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n + n + 1$ con $x_0 = 1$ tiene como solución:

(a) $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

(b) $x_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}.$

(c) $x_n = \dfrac{n^2-n+2}{2}.$

---

Justifica la respuesta:

**A5.1.4** La solución de la ecuación en diferencias $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 1 \quad \text{si } n \geq 0, \end{cases}$ es:

(a) $2(n+1) - 1$

(b) $2^n$

(c) $2^{n+1} - 1$

---

Comprobación:

---

**A5.1.5** La sucesión recurrente $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = 1 - x_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2. \end{cases}$ verifica

(a) $x_n \sim 1$.

(b) $x_n \in O(1)$, pero $a_n \not\sim 1$.

(c) No se puede asegurar ninguna de las afirmaciones anteriores

---

Justifica la respuesta:

---

**A5.1.6** Resuelve las siguientes ecuaciones en diferencias e indica si las sucesiones correspondientes están en $O(n)$

$$\begin{cases} x_1 = 1/2, \\ x_{n+1} = \dfrac{n}{2} x_n \quad n \geq 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_0 = 1, \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{3}{2^{n+1}} \quad n \geq 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_1 = 0, \quad z_2 = 6 \\ z_n = 2z_{n-1} - z_{n-2} \quad n \geq 3 \end{cases}.$$

**A5.1.7** Compara el orden de magnitud de las sucesiones siguientes, resolviendo previamente las ecuaciones en diferencias correspondientes.

$$\begin{cases} x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \\ x_{n+2} - 2x_{n+1} = 3x_n \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 0, \quad y_2 = -2 \\ y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

**A5.1.8** Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a dos problemas de $n-1$ datos y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Un segundo algoritmo resuelve el mismo problema con un número de instruciones $x_n$ tal que $x_n - x_{n-2} = 2^n$, con $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$. Calcula con Maxima el número de instrucciones por ambos métodos para $n = 10^3$ y para $n = 10^6$ e indica el orden de cada algoritmo. ¿Cuál te parece más adecuado?