Pon las tres primeras letras del primer apellido:

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático. Curso 2019/20
Actividad de aprendizaje 2 (Temas 3 y 4)

Es condición necesaria entregar esta actividad **COMPLETAMENTE** resuelta (escrita a mano y con el nombre puesto) para poder hacer la prueba de la evaluación continua del módulo 2.

3.1 Clasifica ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y sabe verificar soluciones.

Referencias en la Guía Docente: Sección 3.1. Problemas 3.1-3.4

A3.1.1 La siguiente es una ecuación diferencial de primer orden, lineal, no homogénea, con coeficientes constantes:

(a) $y' = \dfrac{y}{x} + 3$.

(b) $y' + y^2 = \text{sen}(x)$.

(c) $y' = y + \text{sen}(x)$.

Justifica la respuesta correcta, indicando por qué las otras opciones son falsas:

A3.1.2 La solución general de la ecuación diferencial $y' = y$ es:

(a) $y = 0$.

(b) $y = e^x + K$, con $K \in \mathbb{R}$.

(c) $y = Ke^x$, con $K \in \mathbb{R}$.

Justifica la respuesta correcta e indica por qué las otras opciones son falsas:

A3.1.3 La función $y(x) = \sqrt{x^2+3}$ es solución de la siguiente ecuación diferencial:

(a) $yy' = x$.

(b) $y' = \dfrac{1}{2y}$.

(c) $y' = \dfrac{x}{2y}$.

Justifica la respuesta correcta:

Apellidos y nombre:

A3.1.4 Clasificar EDO. Completa el siguiente cuadro indicando el orden de cada una de las EDO y diciendo si es lineal, si es homogénea o si es de variables separables.

	Orden	Lineal	Homogénea	V. Separables
$y'y = x^3$				
$y' + y = x^3$				
$y' + yx = 0$				
$y'' + 2y = x$				
$y'' = 9y - 6y'$				

3.2 Resuelve EDO y problemas de valor inicial (PVI).

Referencias en la Guía Docente: Secciones 3.2, 3.3, Problemas 3.5, 3.6 y Práctica 3.

A3.2.1 Esquema. En cada caso, indica en qué consiste un PVI y pon un ejemplo.

(a) Para una EDO de orden 1: (b) Para una EDO de orden 2:

Escribe el proceso a seguir para resolver con wxMaxima un PVI y aplícalo al ejemplo.

(a) Para una EDO de orden 1: (b) Para una EDO de orden 2:

Apellidos y nombre:

A3.2.2 Ejercicio. Determina la solución particular de los siguientes PVI (haciendo los cálculos a mano y comprobando los resultados con wxMaxima).

(a) $y'x = y^2, y(1) = 1$.

Resolución | Comprobación

(b) $y' = -y + 4, y(0) = 1$.

Resolución | Comprobación

(c) $y' = 2y + x, y(0) = 1$.

Resolución | Comprobación

Apellidos y nombre:

A3.2.3 Ejercicio. Halla la solución particular de los siguientes PVI:

- $y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$

  Resolución Comprobación

- $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

  Resolución Comprobación

- $y'' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6.$

  Resolución Comprobación

Apellidos y nombre:

3.3 Resuelve problemas que se modelizan en términos de EDO.

Referencias en la Guía Docente: Problemas 3.7 a 3.10 y Práctica 3.

A3.3.1 Problema (con wxMaxima). Para cuerpos de baja densidad, la resistencia del aire es proporcional a la magnitud de la velocidad instantánea de dicho cuerpo, pero en sentido contrario a la dirección de movimiento. Por ello, la velocidad $V(t)$, en caída libre, de un cuerpo de ese tipo viene dada por la ecuación diferencial $mV' = mg - kV$, siendo m la masa del cuerpo, g la aceleración de la gravedad y $k > 0$ la constante de amortiguación.

Se supone que nos encontramos en el planeta Venus, donde $g = 8.9\ m/s^2$, y que t se mide en segundos.

(a) Halla la expresión de $V(t)$, si se suelta un cuerpo de masa 4 gramos en caída libre sin darle ningún tipo de impulso. Para ello, plantea el PVI y determina con wxMaxima la solución particular.

(b) Estudia el comportamiento asintótico de $V(t)$ y halla el valor de k si la velocidad límite es $0.2\ m/s$.

(c) Halla la velocidad del cuerpo al cabo de una décima de segundo y al cabo de 1 segundo.

Apellidos y nombre:

A3.3.2 Problema (con wxMaxima). Una persona debe memorizar 100 páginas de un tema inicialmente desconocido. En la teoría del aprendizaje, se sabe que la velocidad con que se memoriza un tema es proporcional a la cantidad de material pendiente de memorizar. Se denomina $y\,(t)$ a la cantidad de páginas memorizadas al cabo de t días y se sabe que, para la persona en cuestión, la constante de proporcionalidad vale $k = 0.2$.

(a) Plantea y resuelve el PVI que verifica $y(t)$.

(b) Calcula el número de páginas memorizadas en 5 días.

(c) Determina el tiempo que tardará en memorizar 90 páginas.

A3.3.3 Problema (con wxMaxima). Para un circuito, regido por la ecuación diferencial $L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + Q(t)/C = E(t)$, se sabe que $L = 0.05\,H$, $R = 2\,\Omega$, $C = 0.01\,F$, y que la fuerza electromotriz es una función constante $E(t) = 100\,V$. Si en el instante inicial es $Q(0) = 5$ y $Q'(0) = 0$, representa gráficamente $Q(t)$ durante el primer segundo.

Estudia cómo varía el regimen estacionario al modificar R y cómo varía al modificar C.

Apellidos y nombre:

4.1 Maneja los conceptos básicos de sucesiones y las relaciones entre ellos.
Referencias en la Guía Docente: Sección 4.0.

A4.1.1 Teoría. Escribe, con la formalización matemática precisa, las definiciones de:

(a) Sucesión acotada.

(b) Sucesión monótona.

(c) Sucesión convergente (incluye la definición formal de $\lim a_n = L$).

A4.1.2 Esquema. Establece relaciones entre los conceptos anteriores y da contraejemplos para las relaciones que no se verifiquen.

Apellidos y nombre:

A4.1.3 Ejercicio. Completa el siguente cuadro para cada una de las sucesiones, indicando:

- en *monotonía*: decir si es creciente, decreciente o no es monótona.
- en *acotación*: especificar si es acotada, o sólo acotada superior o inferiormente, o no acotada (indicar, en caso de que existan, cotas superior y/o inferior).
- en *convergencia*: indicar el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$ o especificar que no existe.

a_n	Monotonía	Acotación	Convergencia
2^n			
$\left(-\frac{1}{\ln 3}\right)^n$			
e^{-n}			
$(-3)^n$			
-3^n			
$\frac{n-1}{n^2+1}$			
$\frac{n+(-1)^n}{n}$			
$\cos(n\pi)$			
$\frac{5+\operatorname{sen}(n)}{n}$			

A4.1.4 Sea a_n una sucesión de números reales tal que $a_n \leq 2(-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se puede asegurar que:

(a) a_n no está acotada.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(c) a_n está acotada superiormente.

Justifica la respuesta:

Apellidos y nombre:

4.2 Calcula límites de sucesiones definidas de forma explícita y deduce propiedades sobre el comportamiento de la sucesión a partir del valor de su límite.

Referencias en la Guía Docente: Secciones 4.0 y 4.1. Problemas 4.0-4.6

A4.2.1 Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ se puede asegurar que

(a) a_n es monótona creciente.

(b) $a_n \geq 0$ para todo n.

(c) Existe un n a partir del cual $a_n > 32$.

Justifica la respuesta:

A4.2.2 Sea a_n una sucesión convergente a $l \in \mathbb{R}$.

(a) Si $a_n < 0$ para todo n, se puede asegurar que $l < 0$.

(b) Si $a_n \leq 0$ para todo n, se puede asegurar que $l \leq 0$.

(c) Si $l < 0$, se puede asegurar que $a_n < 0$ para todo n.

Busca un contraejemplo para cada una de las opciones falsas:

A4.2.3 La sucesión $a_n = \dfrac{n^2 \cos(n^2)}{\sqrt{2n^5 + 1}}$

(a) Converge a cero.

(b) Es acotada pero no es convergente.

(c) Es divergente y no está acotada.

Justifica la respuesta:

A4.2.4 La sucesión $a_n = \dfrac{n \cos(n^2)}{n + 1}$

(a) Converge a cero.

(b) Es acotada pero no es convergente.

(c) Es divergente y no está acotada.

Justifica la respuesta:

Apellidos y nombre:

4.3 Utiliza la regla del sandwich para calcular límites.

Referencias en la Guía Docente: Sección 4.1. Problemas 4.7 y 4.8.

A4.3.1 Teoría. Enuncia la regla del Sandwich y úsala para demostrar que si a_n y b_n son sucesiones de números reales, con $|b_n| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

A4.3.2 Se considera la sucesión $a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^3+1}} + \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^3+2}} + ... + \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^3+n}}$. Entonces:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Justificar la respuesta:

A4.3.3 Se considera la sucesión $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+1} + \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+2} + ... + \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+n}$. Entonces:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Justificar la respuesta:

Apellidos y nombre:

4.4 Determina órdenes de magnitud. Compara órdenes de magnitud de diferentes sucesiones y lo aplica al estudio de complejidad de algoritmos.

Referencias en la Guía Docente: Sección 4.2. Problemas 4.12-4.18

A4.4.1 Teoría. Define el concepto de sucesiones del mismo orden y da dos ejemplos distintos de sucesiones del mismo orden que $a_n = n\log(n)$.

A4.4.2 El orden de magnitud de la sucesión $a_n = \dfrac{n^{1/2} + \ln(2^n)\ln(n)}{\sqrt{n}\ln(n^7)}$ es:

(a) $\dfrac{2^n}{n^7}$.

(b) $n \ln n$.

(c) $n^{1/2}$.

Justifica la respuesta, indicando las propiedades usadas:

A4.4.3 Si las sucesiones (a_n) y (b_n) verifican $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces

(a) $a_n \sim b_n$.

(b) $b_n \ll a_n$.

(c) Ninguna de las anteriores.

¿Por qué?

Apellidos y nombre:

A4.4.4 Teoría. Escribe la jerarquía de infinitos. Asegúrate de que sabes demostrar todas las relaciones y escribe la demostración que te resulte más complicada.

A4.4.5 Teoría. Escribe la definición de $a_n \in O(b_n)$ y demuestra que si $a_n \ll b_n$ entonces $a_n + b_n \in O(b_n)$.

Apellidos y nombre:

A4.4.6 Ejercicio (*). Dadas las sucesiones:

$$a_n = \frac{n+2+3^{-n}}{\ln(n^3+1)}, \quad b_n = \frac{3^n+n^3}{(n+1)}, \quad c_n = \frac{(n+3)!}{3+n^2}, \quad d_n = \frac{3^n+n!}{(n+3)!}, \quad e_n = 3^n - 2^n\cos(n).$$

(a) Determina sus órdenes de magnitud.

(b) Ordénalas de menor a mayor magnitud.

(c) Indica cuáles de ellas están en $O(1)$, cuáles en $O(n^3)$, cuáles en $O(e^n)$ y cuáles en ninguno de ellos.

(*) **En todos los apartados hay que justificar las respuestas utilizando las definiciones y/o las propiedades.**

Apellidos y nombre:

A4.4.7 Problema. Los costes de procesar n datos con dos procedimientos diferentes vienen dados respectivamente por (x_n) e (y_n) donde

$$x_n = \frac{4^n}{n^4+1} + \frac{4^n}{n^4+2} + \frac{4^n}{n^4+3} + \cdots + \frac{4^n}{n^4+n} \qquad\qquad y_n = 4^n \left(\frac{2+(-1)^n}{n} \right)$$

(a) Usa la regla del sandwich para demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(b) Justifica que $x_n \in O\left(\frac{4^n}{n^3}\right)$.

(c) Compara el orden magnitud de y_n con el de $\frac{4^n}{n^3}$.

(d) ¿Cuál de los dos procedimientos es más adecuado para valores grandes de n? Justifica la respuesta.

Apellidos y nombre:

4.5 Modeliza problemas en términos de sucesiones recursivas, analiza propiedades básicas, comprueba si coinciden expresiones recursiva y explícita de una sucesión y determina órdenes de magnitud de sucesiones recursivas.

Referencias en la Guía Docente: Secciones 4.0 y 4.1. Problemas 4.9 y 4.10. Práctica 4.

A4.5.1 Problema. La ley antitabaco entró en vigor en Enero de 2011. En este momento, el número de personas fumadoras en la Comunidad de Madrid era de un millón. Se supone que desde entonces, cada año dejan de fumar un 20% de fumadores y que, por otra parte, cada año hay 100000 nuevos fumadores. Si F_n representa el número de millones de personas fumadoras en la Comunidad al cabo de n años (a partir de enero de 2011), se pide:

(a) Dar una definición recursiva de la sucesión F_n.

(b) Usar wxMaxima para determinar el número de fumadores en enero de 2020.

(c) Demostrar por inducción que $F_n > 0.5$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) Demostrar que F_n es una sucesión convergente y hallar su límite.

Apellidos y nombre:

A4.5.2 Estudia la convergencia y calcula el límite de la sucesión $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

A4.5.3 La forma explícita de la sucesión recursiva $x_{n+1} = x_n + 2^{n+1}$ con $x_0 = 1$ es:

(a) $x_n = 2^n$.

(b) $x_n = 2^{n+1} - 1$.

(c) $x_n = (n+1)2^n$.

Justifica la respuesta:

A4.5.4 La sucesión recursiva $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = 1 - x_{n-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ verifica

(a) $x_n \in O(1)$.

(b) $x_n \sim n$.

(c) $x_n \sim 1$.

Justifica la respuesta:

Apellidos y nombre:

A4.5.5 Ejercicio Determina y compara los órdenes de magnitud de las sucesiones siguientes, resolviendo previamente con wxMaxima las ecuaciones en diferencias correspondientes.

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_n = 2x_{n-1} + 1 \quad n \geq 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{3}{2^{n+1}} \quad n \geq 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_1 = 0,\ z_2 = 6 \\ z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

A4.5.6 Ejercicio Determina con wxMaxima la forma explícita de las siguientes sucesiones recursivas e indica cuales de ellas están en $O(n)$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \\ x_{n+2} - 2x_{n+1} = 3x_n \quad n \geq 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_0 = 0, \quad y_1 = -1 \\ y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_0 = 1, \quad z_1 = \sqrt{2} \\ z_{n+2} + z_n = \sqrt{2}\, z_{n+1} \quad n \geq 1 \end{cases}.$$

NOTA: Para z_n, conviene simplificar la expresión obtenida usando el botón **Canónico(tr)**

Apellidos y nombre:

A4.5.7 Problema (con wxMaxima). Un algoritmo emplea 2 instrucciones elementales para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada y 3 cuando hay dos. Si el número de datos es $n \geq 3$, usa n instrucciones para reducir el problema a uno con $n-1$ datos y otro con $n-2$ datos y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Sea a_n el número de instrucciones para n datos de entrada.

(a) Escribe la expresión recursiva de a_n.

(b) Resuelve con wxMaxima la ecuación recursiva.

(c) Determina el orden de magnitud de a_n.

A4.5.8 Problema (con wxMaxima). Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, usa $n-1$ instrucciones para reducir el problema a dos problemas de $n-1$ datos y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Un segundo algoritmo resuelve el mismo problema con un número de instrucciones x_n tal que $x_n - x_{n-2} = 2^n$, con $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$. Compara la complejidad de ambos algoritmos e indica cuál será más rápido con 100 datos de entrada.

Apellidos y nombre:

A4.5.9 Problema (con wxMaxima). En un laboratorio farmacéutico se están probando los efectos de un medicamento A para la regeneración de tejidos. Se realiza un experimento sobre una muestra de tejido de $1\,g$, y se comprueba que la diferencia entre la masa de tejido de un día y la del día anterior es $0.02\,g$ más un 10% del tejido existente el día anterior.

(a) Escribe la expresión recursiva de la sucesión $a(n)$ que describe la masa de la muestra de tejido cuando han pasado n días.

(b) Halla con wxMaxima la expresión explícita de $a(n)$ y calcula la masa de tejido que se tendrá al cabo de 5 días y al cabo de un mes.

(c) El laboratorio de la competencia tiene un medicamento B que, aplicado a una muestra de $1\,g$, consigue que, al cabo de n días, la muestra alcance una masa $y_n = 0.04n^2 + 1$ gramos. Determina la masa de tejido que se tendría, con este medicamento, al cabo de 5 días y al cabo de un mes.

(d) ¿Cuál de los dos medicamentos es preferible para un tratamiento a largo plazo?