

HOJA DE EJERCICIOS 6  
Análisis Matemático.  
CURSO 2021–2022.

---

**Problema 1.** a) Dada la función  $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

demuestra que  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Utiliza este resultado para comprobar que la ecuación

$$x^2 (e^x - 1) - y^3 = 0,$$

aunque no cumple la condición del teorema de la función implícita en  $(x, y) = (0, 0)$ , define implícitamente una única función  $y(x)$  que es  $\mathcal{C}^1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Demuestra que en la siguiente ecuación:

$$xy + \cos z = 1,$$

no es posible despejar  $z$  como función de  $(x, y)$  alrededor de  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  y  $z_0 = 0$ .

*Indicación:* Considera  $x, y$  muy pequeños y de signos opuestos.

c) Demuestra que la ecuación

$$\cos x - y^3 = 0,$$

define una única función implícita  $y(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y dibuja el grafo  $\{y = y(x)\}$ . Esta  $y(x)$  es función  $\mathcal{C}^\infty$  de  $x$  en un entorno de  $x_0 = 0$  (ahí se cumple la condición del teorema de las funciones implícitas), pero encuentra valores de  $x$ , alejados del valor 1, en los que  $y(x)$  ni siquiera es diferenciable.

---

**Problema 2.** Consideramos la función  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como sigue:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_2 \cos x_1 + x_3^2 + 7x_2x_4 \\ e^{x_1}x_3 + 5e^{x_2} - \sin x_3 - x_1x_4^2 \end{bmatrix},$$

y los puntos  $a = (0, 1, 0, 0)$ ,  $a' = (0, 0, 0, 1)$  y  $a'' = (0, 1, 1, 0)$ .

a) Queremos resolver el sistema de dos ecuaciones  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(a)$  cerca del punto  $a$ . Determina qué dos variables, entre las  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , se puede asegurar que se despejan como funciones diferenciables de las otras dos.

b) Misma pregunta para el punto  $a'$ .

c) Misma pregunta para el punto  $a''$ .

---

**Problema 3.** Si  $M, N \subset \mathbb{R}^{n+k}$  son subvariedades  $n$  dimensionales arbitrarias, ¿es siempre  $M \cup N$  una subvariedad? ¿Y  $M \cap N$ ?

---

**Problema 4.** Estudiar si el conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq 0, \pm 1\}$$

es una subvariedad unidimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Representar gráficamente  $M$ .

---

**Problema 5.** Demostrar que  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$  no es una subvariedad unidimensional de  $\mathbb{R}^2$ .

---

**Problema 6.** Representar gráficamente el conjunto

$$C = \{(\cos t, \sin t, t^2(2\pi - t)^2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

y probar que es una subvariedad de dimensión 1 en  $\mathbb{R}^3$ . Hallar los espacios tangente y normal a  $C$  en el punto  $(1, 0, 0)$ .

---

**Problema 7.** Considérense las subvariedades de dimensión 1,  $C_1$  y  $C_2$  en  $\mathbb{R}^3$  determinadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente ambas curvas.

b) Probar que, efectivamente, son subvariedades de dimensión 1.

c) Hallar la recta tangente a  $C_1$  en el punto  $(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14})$ . Hallar la ecuación del plano normal a  $C_2$  en el punto  $((3 + \sqrt{5})/2, (3 + \sqrt{5})/4, -(5 + 3\sqrt{5})/4)$ .

d) Calcular parametrizaciones locales de  $C_1$  y de  $C_2$ . *Indicación:* Utilizar coordenadas esféricas en  $C_1$  y cilíndricas en  $C_2$ .

**Problema 8.** a) Hallar el hiperplano tangente a la gráfica  $G$  de la función

$$f(x, y, z) = e^y \cos z + e^z \cos x + e^x \cos y$$

en el punto de  $G$  correspondiente a  $x = y = z = 0$ .

b) Estudiar si

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 3\}$$

define, localmente en  $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ , una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ . Hallar el plano tangente a  $M$  en  $\mathbf{p}$ . Explicar la relación que guarda éste con el calculado en el apartado anterior.

**Problema 9.** Sea una parametrización  $\mathbf{X}$  de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  con  $\mathbf{X}(0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$ , y denotemos por  $(a_{ij})_{i=1,2,3,j=1,2}$  la matriz de  $D\mathbf{X}(0, 0)$ . Demostrar que la recta normal a  $S$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  viene dada por

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - y_0 \\ a_{31} & a_{11} \\ a_{32} & a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - z_0 \\ a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$