Variedades Diferenciables

Distribuciones en variedades.
Curso académico 2020-2021.

---

1. Sean $X = z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ y $Z = z\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$. Determinar la dimensión de la distribución que definen y analizar si es involutiva.

2. Sean en $\mathbb{R}^3 - \{z = 0\}$ los campos $X_1 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$. Demostrar que definen una distribución involutiva y calcular las variedades integrales por $p = (x_0, y_0, z_0)$.

3. Se considera el oscilador armónico determinado por el sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1(t), \quad m > 0, k = const.$$

   Determinar las variedades integrales de la distribución asociada.

4. Sean X e Y campos completos en una variedad M. Analizar si el corchete $[X, Y]$ es también completo.

5. Sea $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$ un campo que no se anule en ningún punto. Hallar condiciones sobre las funciones componente de X para que la distribución D definida por

$$Y \in D \iff \langle X, Y \rangle = 0$$

   sea completamente integrable.

6. En el octante positivo de $\mathbb{R}^3$ se consideran los campos de vectores

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial z},\ Y = xy\frac{\partial}{\partial y} - xz\frac{\partial}{\partial z}$$

   Analizar si definen una distribución completamente integrable, y determinar en su caso las variedades integrales.

7. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 7z^2 - c^2t^2 - a$. Determinar si los campos de vectores siguientes son tangentes a $M = f^{-1}(0)$:

$$\begin{aligned} X &= \left(x^2 - \alpha\right)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z} + xt\frac{\partial}{\partial t}, \\ Y &= c^2t\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial t}, \\ Z &= z\frac{\partial}{\partial y} - \frac{y}{7}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

   ¿Puede M ser la variedad integral de alguna distribución que contenga los campos anteriores [si son tangentes]?

8. En una variedad M de dimensión se considera un sistema coordinado $\left(U, \varphi = \left(x^1, .., x^n\right)\right)$ y una referencia local

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, .., \frac{\partial}{\partial x^p}, X_1, .., X_{n-p}\right\}$$

   con campos X_i $(i = 1, .., n - p)$ definidos mediante

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} - f^k_{n+i}\frac{\partial}{\partial x^k},\ k = 1, .., p;\ f^k_{n+i} \in \mathcal{F}(U).$$

   Determinar las condiciones para que $D = \langle X_1, .., X_{n-p}\rangle$ determine una distribución completamente integrable.

9. Sea $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ un elemento de línea en $\mathbb{R}^3$. Determinar las condiciones para las cuales existen funciones f, g tales que $\omega = fdg$, es decir, para las cuales existe un factor integrante para la ecuación $\omega = 0$. Demostrar que, en tales condiciones, las superficies de nivel $g = cte$ son las soluciones de dicha ecuación.

10. En $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\right\}$ se considera una distribución $\mathcal{D}$ definida por

$$\mathcal{D}(p) = \mathbb{R}\left\langle X_1(p), X_2(p)\right\rangle,$$

donde

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - yz\frac{\partial}{\partial z}, \; X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{D}$ es una distribución de orden dos involutiva.

(b) Calcular los grupos uniparamétricos [flujos] $\varphi_t^{X_1}$ y $\varphi_s^{X_2}$ asociados a los campos X_1 y X_2.

(c) Analizar si para t, s fijos, la aplicación $\Psi : M \to M$ definida por

$$\Psi(p) = \varphi_s^{X_2} \circ \varphi_t^{X_1}(p)$$

define un difeomorfismo de M.

(d) Determinar la variedad integral N_p de $\mathcal{D}$ en M por un punto genérico p, y hallar una función diferenciable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $N_p = F^{-1}(0)$.

(e) Hallar una 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$ que anule la distribución. Calcular $d\omega$ y deducir que el ideal J generado por ω es un ideal diferencial.

(f) Sea $p = (1, 1, 1) \in M$. Utilizando el apartado 4, justificar que $u = xy - 1, v = -\ln y, w = F(x, y, z)$ definen un sistema coordenado local de M por el punto p.

(g) Calcular $X_1|_U$ y $X_2|_U$ y justificar que no pueden nunca ser campos coordenados en U.

(h) Hallar campos $Y_1, Y_2 \in \mathcal{D}$ tales que $Y_1|_U = \frac{\partial}{\partial u}$ e $Y_2|_U = \frac{\partial}{\partial v}$. Expresar Y_1 e Y_2 en función de X_1 y X_2.

(i) Deducir de lo anterior que la variedad integral de $\mathcal{D}$ por $p = (1, 1, 1)$ está especificada por $w = cte$.

(j) Justificar que Y_1, Y_2 e $Y_3 = \mathrm{e}^{-xy}\frac{\partial}{\partial z}$ definen una paralelización en U.