Variedades Diferenciables

Campos de vectores.

Curso académico 2020-2021.

---

1. Determinar las curvas integrales de los campos X definidos por

   (a) $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}$ en $\mathbb{R}^3$.

   (b) $X = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial y}$ en el plano

   (c) $X = xy\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ en el plano.

   (d) $X = (x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$ en la esfera $\mathbb{S}^2$.

   Determinar cuales de ellos son completos.

2. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada. Determinar la condición que un campo del plano ha de satisfacer para estar π-relacionado con algún campo de la recta $\mathbb{R}$.

3. Hallar la expresión general de un campo $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^2\right)$ en los casos siguientes

   (a) $\left[\frac{\partial}{\partial x}, X\right] = \left[\frac{\partial}{\partial y}, X\right] = 0$.

   (b) $\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, X\right] = 0$.

4. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Hallar la relación existente entre $[fX, gY]$ y $fg\,[X,Y]$. Expresar dicha relación en coordenadas locales.

5. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, demostrar que

   (a) $[X, fY] = (Xf)\,Y + f\,[X,Y]$

   (b) $[fX, Y] = f\,[X,Y] - (Yf)\,X$

   ¿Que significado tienen estas identidades?

6. Sea $X_A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ el campo determinado de la forma siguiente

   $$X_A(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})_{\mathbf{x}} := \alpha^i_j x^j \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\mathbf{x}},$$

   donde $A = \left(\alpha^i_j\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demostrar que si $A \sim B$ (semejanza de matrices), entonces los campos X_A y X_B están ϕ-relacionados a través de un automorfismo lineal $\phi \in Aut(\mathbb{R}^n)$.

7. Sea $M = \mathbb{S}^1$ e $Y(x,y) = (-y, x)$, $Z(x,y) = (x-y)\,Y(x,y)$. Hallar los campos tales que $[X,Y] = Z$.

8. Hallar las funciones $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\Psi_t(x) := xf(t)$ sea un flujo en $\mathbb{R}$.

9. Sea

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

   Se define

   $$e^{tA} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i A^i$$

   como la exponencial de A.

   (a) Calcular e^{tA}.

   (b) Demostrar que $\Psi_t(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x} \longmapsto e^{tA}\mathbf{x}$ es un grupo uniparamétrico.

   (c) Determinar el generador infinitesimal y las órbitas de la acción.

10. Sea $\psi_{t,\mathbf{x}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi_t\left((x,y)\right)=\left(x\cosh t+y\sinh t, y\cosh t+x\sinh t\right).$$

Demostrar que es un grupo uniparamétrico y determinar generador infinitesimal y órbitas. Una función $F(x,y)$ se dice invariante del grupo uniparamétrico G_Ψ si $X(F)=0$. Determinar las funciones invariantes de G_Ψ.

11. Sean en $V=\langle t,x,u\rangle$ los campos[1]

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x},\ X_3=t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_4 &= 2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u},\ X_5=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx\frac{\partial}{\partial x}-(tu+x)\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

   (a) ¿Forman estos campos un álgebra de Lie?

   (b) Para cada uno de los generadores X_i, determinar el flujo asociado.

12. Sea $(L,[])$ un álgebra de Lie. Una aplicación $d:L\to L$ que verifique

$$d[X,Y]=[dX,Y]+[X,dY],\ \forall X,Y\in L$$

se llama derivación de L. Demostrar que $Der(L)=\{d\mid d \text{ es derivación de } L\}$ es un álgebra de Lie.

[1] Estos campos son simetrías de la llamada ecuación de Burgers $u_t=u_{xx}+uu_x$.