Variedades Diferenciables

Espacio tangente.

Curso académico 2020-2021.

---

1. Sea $N \subset M \subset \mathbb{R}^q$ variedades de dimensiones p y q, respectivamente. Demostrar que toda base de $T_x N$ puede extenderse a una base de $T_x M$.

2. Sea $O(n)$ el grupo ortogonal. Calcular el espacio tangente a $O(n)$ en la identidad I. ¿Que puntos de $O(n)$ son tales que $T_X O(n) = T_I O(n)$?

3. Sea $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(R) \mid \det(A) = 1\}$.
   (a) Demostrar que $SL(n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable.
   (b) Demostrar que el espacio tangente a $SL(n, \mathbb{R})$ en la identidad I está formado por las matrices de traza nula.

4. Sean M, N variedades. Demostrar que se verifica el isomorfismo lineal $T_p M \times T_q N \simeq T_{(p,q)} M \times N$.

5. Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación definida por
   $$f(x, y, z) = \left(x^2 - y^2, xz, xy, yz\right).$$
   Demostrar que $f(\mathbb{S}^2)$ es una VD y determinar el espacio tangente en un punto genérico.

6. Sea $\phi : M \to N$ una aplicacción diferenciable entre variedades. Demostrar que la diferencial $\phi_{*,p} = d\phi_p : T_p M \to T_{\phi(p)} N$ está determinada por la acción
   $$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \mapsto \left(\frac{\partial\left(y^\alpha \phi\right)}{\partial x^i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\phi(p)},$$
   donde $\left\{x^i\right\}$ e $\left\{y^j\right\}$ son coordenadas locales en p y $\phi(p)$, respectivamente.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por
   $$(x, y) \mapsto x^3 + xy + y^3 + 1.$$
   Determinar la diferencial $f_* : T_p \mathbb{R}^2 \to T_{f(p)} \mathbb{R}$ y hallar los puntos donde es inyectiva y/o suprayectiva.

8. Sea $\Phi : M \to N$ una aplicación diferenciable. Un punto $p \in M$ se dice crítico si la diferencial $\Phi_* : T_p M \to T_{\Phi(p)} N$ no es suprayectiva. Dar un ejemplo de una aplicación $\Phi : M \to N$ tal que todo punto de M sea crítico.

9. Demostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (xe^y + y, xe^x - y)$ es un difeomorfismo.

10. Sea $(U, \varphi) = (U, x_1, .., x_n)$ un sistema coordenado de M en un punto p y sean
    $$x_i' = x_i'(x_1, .., x_n)$$
    funciones diferenciables definidas en un entorno $V \subset U$. De mostrar que si el jacobiano
    $$\det\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right)(p_0) \neq 0,$$
    entonces las funciones x_i' determinan una referencia local $(U', \Psi = (x_1', .., x_n'))$ en un entorno U' de p_0.