Diagonalización.

- Si detectas algún error o errata, por favor, comunicaselo al profesor de la asignatura.
- El subíndice $_{can_n}$ hace referencia a la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
- Las matriz de cambio de la base B a la base $\bar{B}$ se denota por $C_{B\bar{B}}$.

1. Calcular los autovalores de las siguientes matrices:

   $a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ autovalores: $0, 5$

   $b)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ autovalores: $0, 0, -1$

   $c)$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ autovalores: $1, 2, 3$

   $d)$ $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ autovalores: a, a, a, a

2. Las siguientes matrices representan endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ respecto a cierta base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$. Calcular los autovectores y los autovalores de cada uno de ellos, estudiese si éstos son o no diagonalizables y, en caso afirmativo, hallar las bases en las cuales tienen expresiones diagonalizables.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalores: $1, 2, 2$.

Bases de los autoespacios: $B_{L_2} = \{(2,1,1)\}, B_{L_1} = \{(1,0,1)\}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Autovalores: $1, 3, 3$.

Bases de los autoespacios: $B_{L_3} = \{(2,0,1),(0,1,0)\}, B_{L_1} = \{(1,0,1)\}$.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

autovalores: $0, 2, -2$

bases de autovectores: $B_{L_0} = \{(1,0,1)\}, B_{L_{-2}} = \{(-1,0,1)\}, B_{L_2} = \{(1,2,3)\}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

autovalores: $1, 1, 7$

bases de autovectores: $B_{L_1} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}, B_{L_7} = \{(1,1,2)\}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

autovalores: $-1, 1, 1$

bases de autovectores: $B_{L_1} = \{(0,1,0)\}, B_{L_{-1}} = \{(-1,-1,1)\}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

autovalores: $-1, -1, 2$

bases de autovectores: $B_{L_2} = \{(0,1,4/3)\}, B_{L_{-1}} = \{(0,0,1)\}$

3. Calcular la potencia $n-ésima$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   SOL: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   SOL: $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1-2^n & \frac{1}{2}+\frac{7}{2}3^n - 4\cdot 2^n \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

4. Diagonaliza la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (5x-4z, 3y, 2x-z).$$

Soluciones:

autovalores: $1, 3, 3$

bases de autovectores: $B_{L_1} = \{(1,0,1)\}, B_{L_3} = \{(2,0,1), (0,1,0)\}$

Como coinciden las multiplicidades de los autovalores como raiz de la ecuación característica con las dimensiones de los correspondientes autoespacios el endomorfismo es diagonalizable. Sólo queda calcular las matrices de paso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Sea A la matriz asociada a una aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Comprobar que A es diagonalizable.

Soluciones:

autovalores: $-1, 1, 1$

bases de autovectores: $B_{L_{-1}} = \{(1,1,0)\}, B_{L_1} = \{(-1,1,0), (0,0,1)\}$

Como la multiplicid de cada autovalor coincide con la dimensión del correspondiente autoespacio la aplicación es diagonalizable.

b) Calcular las matrices de paso.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por: $f(x,y,z) = (2x+z, 2y, x+2z)$ Calcula los autoespacios de f.

7. **Aplicación a la genética.** Se considera un carácter en individuos diploides que está gobernado por alelos A (dominante) y a (recesivo). Un individuo, desde el punto de vista de este carácter, puede presentar los genotipos

a) AA (raza pura dominante).

b) Aa (híbrido).

c) aa (raza pura recesiva).

Averiguar la proporción de cada genotipo presente en la población en:

a) la quinta generación si se dispone de una población con la misma proporción de individuos de cada genotipo que es suficientemente extensa y se cruzan al azar individuos de esta población.

b) la quinta generación si en el instante inicial sólo hay individuos homocigóticos dominantes que se cruzan al azar con individuos de esa población en sucesivas generaciones.

   Esta situación se daría si, por ejemplo, las hembras fueran todas homocigóticas dominantes y los machos presentaran todas las combinaciones.

c) en un futuro muy lejano si se parte de la situación (1).

INDICACIÓN: La matriz de transición es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{es decir} \qquad \begin{pmatrix} x_{n+1}^{AA} \\ x_{n+1}^{Aa} \\ x_{n+1}^{aa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^{AA} \\ x_n^{Aa} \\ x_n^{aa} \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES:

a) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{64} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{15}{64} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c) Necesitamos diagonalizar la matriz. Los autovalores y la base de autovectores son

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1/2,\ \lambda_3 = 0 \qquad B_D = \{(1,2,1), (-1,0,1), (1,-2,1)\}$$

Calculamos la enésima potencia de la matriz de transición y tomando el límite obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Si las condiciones iniciales hubieran sido las del apartado (2), el resultado habría sido:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

8. **Describir, mediante una aplicación lineal, las siguientes situaciones:**

   a) Una población de aves migratorias se instala en invierno en dos lagunas próximas. Supongamos que las aves fueron anilladas hace años y en base a un seguimiento de la población de aves se ha establecido que

   - El 50 % de las aves que un año estuvo en la laguna A volverá a la laguna A al año siguiente, mientras que el restante 50 % cambiará de laguna.
   - El 75 % de las aves que un año estuvo en la laguna B volverá a la laguna B al año siguiente, mientras que el restante 25 % cambiará a la laguna A.

   Si denotamos por x_n^A y x_n^B las poblaciones en el n-ésimo año en las lagunas A y B respectivamente, la aplicación lineal tiene que describir la relación $f(x_n^A, x_n^B) = (x_{n+1}^A, x_{n+1}^B)$

   b) En un distrito electoral se presentan tres partidos: el progresista, el conservador y el libertario. Se ha estimado que, cada vez que hay elecciones:

   - de los que votaron al partido progresista, en las siguientes elecciones 8/10 vuelven a votar progresista, 1/10 vota conservador y 1/10 vota libertario.
   - de los que votaron al partido conservador, en las siguientes elecciones 7/10 vuelven a votar conservador, 2/10 vota progresista y 1/10 vota libertario.

- de los que votaron al partido libertario, en las siguientes elecciones 4/10 vuelven a votar libertario, 3/10 vota progresista y 3/10 vota conservador.

Si denotamos por x_n^p, x_n^c y x_n^l a los votantes en el n-ésimo año de los partidos progresista, conservador y libertario respectivamente, la aplicación lineal tiene que describir la relación $f(x_n^p, x_n^c, x_n^l) = (x_n^p, x_n^c, x_n^l)$