Aplicaciones lineales.

- Si detectas algún error o errata, por favor, comunicaselo al profesor de la asignatura.
- El subíndice $_{can_n}$ hace referencia a la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
- Las matriz de cambio de la base B a la base $\bar{B}$ se denota por $C_{B\bar{B}}$.

1. **Decidir si las siguientes aplicaciones son lineales o no.**

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + y, x)$.

   SOL: SI.

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xy, x + y)$.

   SOL: NO.

   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1$.

   SOL: NO.

   d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (0, 0, 0)$.

   SOL: SI.

   e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (2x, y + 1)$.

   SOL: NO.

   f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y^2, x)$.

   SOL: NO.

   g) $f : P_3[x] \to P_3[x]$ definida por $f(p(x)) = xp'(x)$

   SOL: SI.

2. **Indicar para qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ es lineal la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (ax + y, x - b)$.**

   La aplicación es lineal para cualquier valor de a y para $b = 0$.

3. **Para cada una de las siguientes aplicaciones lineales, calcular su matriz asociada de las bases canónicas.**

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y, x)$.

   $$\text{SOL:} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y - z, y + z, x - 2z)$.

   $$\text{SOL:} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z, t) = x + y - 3z + t$.

   $$\text{SOL:} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x) = (2x, 3x, \frac{1}{2}x, \pi x)$.

   $$\text{SOL:} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1/2 \\ \pi \end{pmatrix}$$

4. **Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(1, 0) = (2, -1, 4), f(0, 1) = (4, 2, 7)$.**

   a) **Dar una expresión para la imagen de un vector cualquiera con coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $f(x, y)$.**

SOL:

$f(x,y) = f(x(1,0), +y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1) = (2x+4y, -x+2y, 4x+7y).$

b) **Dar la matriz de la aplicación lineal f en las bases canónicas.**

SOL:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

c) **Calcular $Mf_{can,B}$ siendo B la base $B = \{(2,-1,4),(4,2,7),(1,1,1)\}$**

SOL:

$$Mf_{can,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **Considerar la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por**

$$f(x,y) = (2x-y, -x+y)$$

Calcula la matriz de Mf_{BB} en cada uno de los siguientes casos

a) $B = \{(1,1),(1,-1)\}$

El ejercicio pide determinar una matriz tal que, cuando tengas las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base B, obtengas las coordenadas de $f(\vec{v})$ en la base B. Además, sabemos cómo actua f sobre vectores con coordenadas en la base canónica. Por eso, los pasos a seguir son:

1) Cambiar las coordenadas a la base canónica.

2) Calcular la imagen del vector mediante f. Como obtenemos las coordenadas de $f(\vec{v})$ en la base canónica, tenemos que

3) Cambiar las coordenadas a la base B.

Es decir, la matriz pedida es

$$Mf_{BB} = C_{can,B} Mf_{can,can} C_{B,can} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $B=\{(1,-2),(2,3)\}$ De forma análoga al anterior, obtenemos la matriz pedida

$$Mf_{BB}=C_{can,B}Mf_{can,can}C_{B,can}=\begin{pmatrix}2/7 & -2/7\\ 2/7 & 1/7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

6. **Considerar la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por**

$$f(x,y,z)=(2x-y+z,-x+y,x+3z)$$

Calcula la matriz de Mf_{BB} en cada uno de los siguientes casos

a) $B=\{(1,1,0),(1,-1,2),(2,0,1)\}$

De forma análoga a como procedimos en el ejercicio anterior, la matriz pedida es

$$Mf_{BB}=C_{can,B}Mf_{can,can}C_{B,can}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

b) $B=\{(1,0,-2),(0,2,3),(2,0,1)\}$ De forma análoga a como procedimos en el ejercicio anterior, la matriz pedida es

$$Mf_{BB}=C_{can,B}Mf_{can,can}C_{B,can}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{10}\\ \frac{-2}{5} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

7. **Considerar la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por**

$$f(1,1,0)=3(1,1,0),\qquad f(1,0,1)=-2(1,0,1),\qquad f(0,1,1)=4(0,1,1).$$

a) **Calcular la matriz de f entre las bases B y B siendo** $B=\{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$

SOL $Mf_{B,B}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

b) **Calcular la expresión en coordenadas respecto de la base canónica de la imagen mediante f de un vector con coordenadas en la base canónica (x_c, y_c, z_c).**

Conocidas (x_c, y_c, z_c), hay que obtener sus coordenadas en la base B multiplicando por la matriz de cambio de base $C_{can,B}$:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

luego calcular su imagen mediante f

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

Las coordenadas que obtenemos, son respecto de la base B, y las queremos respecto de la base canónica, por lo que falta multiplicar por $C_{B,can}$. Si "recopilamos" todos los pasos, tenemos

$$f(x_c, y_c, z_c)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

$$f(x_c, y_c, z_c) = C_{B,can} M f_{B,B} C_{can,B} (x_c, y_c, z_c)^T = \left(\frac{x}{2} + \frac{5y}{2} - \frac{5z}{2}, \frac{-x}{2} + \frac{7y}{2} + \frac{z}{2}, -3x + 3y + z \right)^T$$

8. **Calcular la dimensión y una base de** $\ker f$ **e** $\mathbf{Im}f$ **en cada uno de los siguientes casos.** .

Es posible (y muy probable) que obtengas bases diferentes de las que yo doy, dependiendo de las soluciones que calcules en los sistemas de ecuaciones correspondientes. Lo importante es que para la base de cada suespacio obtengas tantos vectores linealmente independientes (que verifiquen las ecuaciones del mismo) como dimensión tiene el subepacio.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y, x)$.

SOL:

1) $\dim \ker f = 0$, No tiene base, este subespacio vectorial sólo contiene al vector $(0,0)$.

2) $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $B_{\mathrm{Im} f} = \{(1,0), (0,1)\}$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x + y - z, y + z, x - 2z)$.

SOL:

1) $\dim \ker f = 1$, $B_{\ker f} = \{(2,-1,1)\}$

2) $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $B_{\mathrm{Im} f} = \{(1,0,1), (1,1,0)\}$

c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z,t) = x + y - 3z + t$.

SOL:

1) $\dim \ker f = 3$,

$B_{\ker f} = \{(1,-1,0,0), (3,0,1,0), (1,0,0,-1,)\}$

2) $\dim \mathrm{Im} f = 1$, $B_{\mathrm{Im} f} = \{1\}$.

9. **Sea $f(x,y,z) = (x + \beta y + \beta z,\ \beta x + y + \beta z,\ \beta x + \beta y + z)$. Calcular la dimensión y las ecuaciones del núcleo y la imagen de f en función del parámetro β.**

Para el núcleo

Valor de β	dimensión	ecuaciones
1	2	$x + y + z = 0$
-1/2	1	$2x - y - z = 0,\ -x + 2y - z = 0$
≠1,-1/2	0	x=y=z=0

Para la imagen

Valor de β	dimensión	ecuaciones
1	1	$x - y = 0,\ x - z = 0$
-1/2	2	$x + y + z = 0$
≠1,-1/2	3	——

10. **Considerar las siguientes aplicaciones lineales:**

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y) = (x + 2y, -x + 2y, y)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$

Se pide:

a) **Las matrices de f y de g respecto de las bases canónicas.**

$$\text{SOL: } M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Las ecuaciones cartesianas de Imf y de $\ker g$.**

SOL: Ecuación cartesiana de Imf $\;x + y - 4z = 0$.

Ecuaciones cartesianas de $\ker g$ $\left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$

c) **Calcular Im$f + \ker g$.**

SOL: $\mathrm{Im}f + \ker g = \mathbb{R}^3$.

d) **Puesto que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tiene sentido considerar la composición $g \circ f$ de dichas aplicaciones lineales. ¿Cuál es la matriz de $g \circ f$?**

$$\text{SOL: } M_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

11. **Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:**

$$f(x, y, z) = (2x + z, 2y, x + 2z)$$

Sea $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x - z = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. ¿Es G un subespacio invariante por f ?, es decir, ¿ee verifica $f(G) \subseteq G$)?

12. **Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:**

$$f(x, y, z) = (x + 2z, x + 2y, 2x + z)$$

Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x - z = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. ¿Es M un subespacio invariante por f ?, es decir, ¿se verifica $f(M) \subseteq M$)?

13. **Describir, mediante una aplicación lineal, las siguientes situaciones:**

    a) Una población de aves migratorias se instala en invierno en dos lagunas próximas. Supongamos que las aves fueron anilladas hace años y en base a un seguimiento de la población de aves se ha establecido que

    - El 50 % de las aves que un año estuvo en la laguna A volverá a la laguna A al año siguiente, mientras que el restante 50 % cambiará de laguna.
    - El 75 % de las aves que un año estuvo en la laguna B volverá a la laguna B al año siguiente, mientras que el restante 25 % cambiará a la laguna A.

    Si denotamos por x_n^A y x_n^B las poblaciones en el n-ésimo año en las lagunas A y B respectivamente, la aplicación lineal tiene que describir la relación $f(x_n^A, x_n^B) = (x_{n+1}^A, x_{n+1}^B)$

    b) En un distrito electoral se presentan tres partidos: el progresista, el conservador y el libertario. Se ha estimado que, cada vez que hay elecciones:

    - de los que votaron al partido progresista, en las siguientes elecciones 8/10 vuelven a votar progresista, 1/10 vota conservador y 1/10 vota libertario.
    - de los que votaron al partido conservador, en las siguientes elecciones 7/10 vuelven a votar conservador, 2/10 vota progresista y 1/10 vota libertario.
    - de los que votaron al partido libertario, en las siguientes elecciones 4/10 vuelven a votar libertario, 3/10 vota progresista y 3/10 vota conservador.

    Si denotamos por x_n^p, x_n^c y x_n^l a los votantes en el n-ésimo año de los partidos progresista, conservador y libertario respectivamente, la aplicación lineal tiene que describir la relación $f(x_n^p, x_n^c, x_n^l) = (x_n^p, x_n^c, x_n^l)$