

## Ejercicios de Álgebra Lineal

61. Demostrar que  $\{(2, 1, 1)^t, (-2, 1, 3)^t, (1, 3, 1)^t\}$  es una base de  $\mathbb{Q}^3$  y dar las coordenadas de  $(1, 1, 1)^t$  en dicha base. Hallar la matriz del cambio de base respecto a la canónica.
62. Demostrar que  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$  es una base de  $\mathbb{R}_3[x]$  (espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la indeterminada  $x$  con coeficientes reales). Probar que  $\{(1+x)^3, x(1+x)^2, x^2(1+x), x^3\}$  es otra base de  $\mathbb{R}_3[x]$  y hallar respecto a esta segunda base las coordenadas de los elementos de la primera. Hallar la matriz del cambio de base.
63. Dados los conjuntos de vectores  $\mathcal{B} = \{(3, 2, 5)^t, (2, 1, 3)^t, (1, 0, 2)^t\}$  y  $\mathcal{B}' = \{(-2, 1, 3)^t, (-2, 1, 2)^t, (1, -1, 3)^t\}$ :
- Demostrar que son bases de  $\mathbb{Q}^3$  y hallar las matrices del cambio de base en los dos sentidos.
  - Hallar las coordenadas de  $v = (2, -1, -4)^t_{\mathcal{B}}$  en la base  $\mathcal{B}'$ .
  - Hallar las coordenadas de  $w = (0, 1, 5)^t_{\mathcal{B}'}$  en la base  $\mathcal{B}$ .
  - Escribir las coordenadas de  $v$  y  $w$  en la base canónica.
64. Sean  $U, W$  subespacios de  $\mathbb{Q}^3$  definidos por  $U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{Q}^3 \mid x = y = z\}$  y  $W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{Q}^3 \mid x = 0\}$ .
- Hallar una base de  $U$  y otra de  $W$ .
  - Comprobar que  $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$ .
65. Probar que  $H = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{K}^4 \mid x + y = z - y = 0\}$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{K}^4$ . Encontrar una base de  $H$  y calcular su dimensión. Prolongar dicha base a una de  $\mathbb{K}^4$ .
66. a) Demostrar que si  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  es una base del espacio vectorial  $V$ , entonces  $V = L(v_1) \oplus \dots \oplus L(v_n)$ .
- b) Si  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\} \cup \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , entonces  $V = V_1 \oplus V_2$ , donde  $V_1 = L(v_1, \dots, v_r)$  y  $V_2 = L(v_{r+1}, \dots, v_n)$ .
67. Sean  $H \subset \mathbb{Q}^4$  de ecuaciones  $x - y = z + t = 0$  y  $L \subset \mathbb{Q}^4$  generado por  $(1, -1, 0, 0)^t$ ,  $(1, 0, -1, 0)^t$  y  $(1, 0, 0, -1)^t$ . Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de  $H$ ,  $L$ ,  $H \cap L$  y  $H + L$ .
68. Hallar la dimensión y una base del subespacio  $W \subset \mathbb{Q}^5$  cuyas ecuaciones implícitas son:
- $$\left. \begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0 \\ x + 2y + 3z + s + t &= 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

69. Sean los subespacios  $U = L((1, 3, -2, 2, 3)^t, (1, 4, -3, 4, 2)^t, (2, 3, -1, -2, 9)^t)$  y  $W = L((1, 3, 0, 2, 1)^t, (1, 5, -6, 6, 3)^t, (2, 5, 3, 2, 1)^t)$  de  $\mathbb{Q}^5$ . Hallar una base y la dimensión de  $U \cap W$ .
70. Dados los subespacios de  $\mathbb{Q}^4$ ,  $U = L((1, 2, 1, 3)^t, (0, 1, 2, 1)^t, (6, 11, 4, 17)^t)$  y  $W : 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ . Hallar ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U + W$  y de  $U \cap W$ . ¿Es  $U + W$  una suma directa?
71. Sean  $n > 2$  un entero y  $U$  y  $W$  dos subespacios de dimensión  $n - 1$ , distintos entre sí, de un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ .
- Probar que todo vector de  $V$  es suma de uno de  $U$  y otro de  $W$ .
  - Calcular la dimensión de  $U \cap W$ .
72. Sean  $a$  y  $b$  números reales y consideremos los subespacios  $U$  y  $W$  de  $\mathbb{Q}^4$  cuyas ecuaciones implícitas son

$$U : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- Calcular la dimensión de  $U$  y  $W$ . ¿Existen valores de  $a$  y  $b$  para los que  $U = W$ ?
  - ¿Cómo han de ser  $a$  y  $b$  para que  $U + W \neq \mathbb{Q}^4$ ?
73. Dado el subespacio vectorial  $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\} \subset \mathbb{Q}^4$ , hallar una base de  $W$ . Determinar si  $(1, -2, 0, 1)^t \in W$  y, en ese caso, hallar sus coordenadas respecto a dicha base de  $W$ .
74. Sea  $H \subset \mathbb{Q}^4$  el subespacio definido como  $H = \{x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0\}$ . Hallar las ecuaciones implícitas de un subespacio  $L \subset \mathbb{Q}^4$  tal que  $\mathbb{Q}^4 = L \oplus H$ .
75. Sean  $H = \{(x, y, z, t)^t \in \mathbb{Q}^4 \mid x - y = z + t = 0\}$  y  $M = L((2, 1, 1, 1)^t, (0, 1, -1, -1)^t, (1, 0, 1, 1)^t)$  subespacios de  $\mathbb{Q}^4$ .
- Hallar una base de  $H$  y las ecuaciones implícitas de  $M$ .
  - Hallar  $H \cap M$  y  $H + M$ . ¿Es  $H + M$  suma directa?
  - Si  $U = L((0, 2, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t)$  hallar  $H + U$  y  $M + U$ . ¿Se trata de sumas directas?
76. Sean  $V = \mathbb{Q}^5$  y  $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t \in \mathbb{Q}^5 \mid x_4 = x_5 = 0\}$ . ¿Cuáles son los elementos de  $V/W$ ? Hallar una base y la dimensión de  $V/W$ .
77.  $W = L((1, 2, 3, 4)^t, (2, 2, 1, 1)^t, (0, 1, 2, 3)^t)$  y  $W' = L((1, 0, -1, 2)^t, (2, 3, 0, 1)^t)$  son subespacios de  $V = \mathbb{Q}^4$ . Hallar una base y la dimensión de  $V/W$  y de  $V/W'$ . Describir las clases de equivalencia en ambos casos.
78. ¿Existe alguna aplicación lineal  $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  tal que

$$f(1, 0)^t = (1, 1)^t, \quad f(3, 2)^t = (1, -1)^t \quad \text{y} \quad f(3, 3)^t = (2, 2)^t?$$

79. Dado el endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{Q}^3$  definido por  $x'_1 = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $x'_2 = x_1 - x_2 + x_3$ ,  $x'_3 = x_1 + x_3$ , hallar la matriz de  $f$  y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen.
80. Dado el endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{Q}^3$  definido por  $x'_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ ,  $x'_2 = 2x_1 + x_2 + x_3$ ,  $x'_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3$ , hallar la matriz de  $f$  y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen.