Ejercicios de Álgebra Lineal

Escribiremos SIEMPRE los vectores por columnas.

21. Dada una matriz cuadrada A, observar que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es antisimétrica. Probar que toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, si se trabaja sobre un cuerpo de característica distinta de dos.

22. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix}$ según los valores de los parámetros a y b.

23. a) ¿Para qué valores de a es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$? b) Hallar A^{-1} cuando $a = 1$.

24. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

    (a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, demostrar que son equivalentes (i) $A = 0$, (ii) $AA^t = 0$ y (iii) $\mathrm{tr}(AA^t) = 0$.

    (b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, encontrar una matriz no nula A tal que $\mathrm{tr}(AA^t) = 0$.

25. Dadas las siguientes matrices hallar su rango y su forma canónica equivalente $\begin{pmatrix} I_r & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}$. Hallar también matrices Q y P (productos de matrices elementales) tales que PAQ sea igual a la forma canónica de A. Proceder análogamente con las matrices B y C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

26. Hallar el valor de los determinantes:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+a) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (1+b) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1+c) \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \ddots & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

27. a) Probar que $\det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{pmatrix} = 0$ para todo número real x. Generalizar.

b) ¿Por qué $x = 2$ es solución de la ecuación $\det \begin{pmatrix} x & 4 & 2 \\ 3-x & x & 1 \\ 1 & 1+x & x \end{pmatrix} = 0$? Hallarlas todas.

28. Resolver los ejercicios 1, 4, 13, 14, 22 y 23 utilizando determinantes.

29. Resolver los siguientes sistemas mediante la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{rcl} 3x+4y & = & 6 \\ -x+7y & = & 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6 \\ x+y-z & = & 0 \\ 2x-y+z & = & 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{rcl} x_1-x_2+x_3+4x_4 & = & 6 \\ 2x_1+3x_2-x_3-11x_4 & = & -7 \\ x_2+x_3+x_4 & = & 1 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ x-y+z & = & 1 \\ 2x+az & = & b \end{array}\right\}$

30. Discutir según los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & b \\ x+y+az & = & b^2 \end{array}\right\}$$

31. Discutir los siguientes sistemas según los valores de a.

a) $\left.\begin{array}{rcl} (a+1)x+y+z & = & a-1 \\ x+(a+1)y+z & = & 2 \\ x+y+(a+1)z & = & a+1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & 1 \\ x+y+az & = & 2a-1 \end{array}\right\}$

32. Hallar el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a: $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

33. Calcular, en función de los parámetros a y b, el rango de las matrices $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & b \end{pmatrix}$.

34. Para cada $x \in \mathbb{K}$, calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} x & -1 & x & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 & -1 \\ 1 & x & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}$.

35. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Por qué no se cumplen las igualdades $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$ y $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

36. Sea V el conjunto de todas las funciones de un conjunto no vacío X en un cuerpo $\mathbb{K}$. Para cualesquiera $f, g \in V$ y $k \in \mathbb{K}$, $f+g$ y kf son las funciones definidas por:

    $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(kf)(x) = kf(x)$, $\quad x \in X$.

    Demostrar que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

37. Sea V el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que son subespacios vectoriales de V: a) $V_1 = \{f \in V | f(3) = 0\}$; b) $V_2 = \{f \in V | f(7) = f(1)\}$; c) $V_3 = \{f \in V | f(-x) = -f(x)\}$.

38. En $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ se definen las operaciones suma y multiplicación por un escalar como sigue:

    $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ y $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, 0)$

    Justificar si $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, +, \cdot)$ es o no un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

39. Estudiar si son linealmente dependientes o no los siguientes conjuntos de vectores y encontrar una base del subespacio que generan:

    a) $\{(2,3,1)^t, (1,0,1)^t, (0,3,-1)^t\}$;

    b) $\{(2,3,1,0,1)^t, (0,1,2,1,4)^t, (0,0,1,4,5)^t, (0,0,0,3,1)^t\}$;

    c) $\{(1,2,1)^t, (2,4,1)^t, (-3,-6,-3)^t\}$.

40. Sea $V = \mathbb{K}[t]$ el conjunto de polinomios en la indeterminada t con coeficientes en $\mathbb{K}$.

    (a) Estudiar la dependencia lineal de los vectores $t^3, t^2+t^3, 2+t+t^3$ y $6+3t+t^2+6t^3$ en V.

    (b) Idem, $t^3 + t/3 + 1, 6t^3 + 2t^2 + 6$, con $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

    (c) Idem, $\pi t + 2, t - \sqrt{2}, 1$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

    (d) Idem, $t^7 + i, it^7 - 1$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.