

127. Diagonalizar en una base ortonormal las matrices simétricas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

128. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

utilizar el algoritmo de GRAM-SCHMIDT para calcular una base ortonormal de cada uno de los cuatro subespacios vectoriales

$$\text{nul } \mathbf{A}^T, \quad \text{col } \mathbf{A}, \quad \text{nul } \mathbf{A}, \quad \text{col } \mathbf{A}^T.$$

Escribir las bases ortonormales de \mathbb{R}^3 y de \mathbb{R}^5 obtenidas a partir de las anteriores y la correspondiente factorización ortogonal

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$$

de la matriz \mathbf{A} , siendo $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ matrices ortogonales.

129. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Obtener una base de \mathbb{R}^6 a partir de bases de los subespacios $\text{nul } \mathbf{A}^T$ y $\text{col } \mathbf{A}$.
2. Hallar una base ortonormal⁸ de \mathbb{R}^6 a partir de bases ortonormales de $\text{nul } \mathbf{A}^T$ y $\text{col } \mathbf{A}$.
3. Realizar igual tarea en \mathbb{R}^7 a partir de los subespacios $\text{nul } \mathbf{A}$ y $\text{col } \mathbf{A}^T$.

⁸ Respecto del producto escalar estándar.

4. Escribir la factorización

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$$

siendo $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ matrices ortogonales.

130. Calcular la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ de las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

131. En una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ del espacio vectorial \mathbb{C}^3 , la aplicación lineal $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tiene matriz

$$\mathbf{A} = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Hallar una base ortonormal que diagonaliza T .

132. Sea \mathbf{A} una matriz $n \times n$. Demostrar:

1. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces \mathbf{A} y \mathbf{A}^T tienen los mismos autovalores.
2. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se verifica

$$\lambda \text{ es autovalor de } \mathbf{A} \text{ si y sólo si } \bar{\lambda} \text{ es autovalor de } \mathbf{A}^H.$$

3. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se verifica

$$\lambda \text{ es autovalor de } \mathbf{A} \text{ si y sólo si } \bar{\lambda} \text{ es autovalor de } \mathbf{A}.$$

4. Decimos que $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, es un *vector propio por la izquierda* de \mathbf{A} cuando existe μ tal que $\mathbf{u}^H \mathbf{A} = \mu \mathbf{u}^H$.

Demostrar que, en esta situación, si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces μ debe ser un autovalor de \mathbf{A} .