Ejercicios 115 a 124

115. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2\,x_3 - x_4 \\ x_2 + x_4 \\ 2\,x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

y sea $E = \operatorname{span}\{\,\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,\}$. Comprobar que el subespacio E es invariante por T y calcular la matriz

$$\left[T\big|_E\right]_{\mathcal{B}_E,\,\mathcal{B}_E},$$

de T restringida a E, respecto de la base $\mathcal{B}_E = \{\,\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,\}$ de E.

116. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 & -2 \\ -9 & 0 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \\ 3 & -5 & -13 & -7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Comprobar que las columnas de $\mathbf{Q}$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.
2. Comprobar que $E = \operatorname{span}\{\,\mathbf{Q}_{:,1}\,,\,\mathbf{Q}_{:,2}\,\}$ y $F = \operatorname{span}\{\,\mathbf{Q}_{:,3}\,,\,\mathbf{Q}_{:,4}\,\}$ son subespacios invariantes por la aplicación lineal T que tiene matriz $\mathbf{A}$ en la base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^4$.
3. Calcular $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ y las matrices

$$\left[T\big|_E\right]_{\mathcal{B}_E,\,\mathcal{B}_E}, \qquad \left[T\big|_F\right]_{\mathcal{B}_F,\,\mathcal{B}_F},$$

   donde

$$\mathcal{B}_E = \{\,\mathbf{Q}_{:,1}\,,\,\mathbf{Q}_{:,2}\,\}, \qquad \mathcal{B}_F = \{\,\mathbf{Q}_{:,3}\,,\,\mathbf{Q}_{:,4}\,\},$$

   son, respectivamente, bases de E y F.

117. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -24 & 11 \end{bmatrix},$$

calcular:

1. Los autovalores de $\mathbf{A}$.
2. Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes por la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
3. Una matriz invertible $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es diagonal.

118. Considérese la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

y el subespacio vectorial $F = \operatorname{col}\mathbf{A}$ de $\mathbb{R}^5$. Hallar dos subespacios G_1 y G_2 de $\mathbb{R}^5$ complementarios de F en $\mathbb{R}^5$. Calcular las proyecciones T_i sobre F a lo largo de cada uno de los G_i .

119. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -12 & 5 & -8 & -7 & 23 \\ -12 & 6 & -8 & -8 & 24 \\ 18 & -7 & 13 & 5 & -28 \\ 6 & -2 & 5 & 0 & -7 \\ 5 & -2 & 4 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

calcular $k = \text{índice}\,\mathbf{A}$ y su descomposición en rango y nilpotencia.

Calcular bases de $\operatorname{col}\mathbf{A}^k$ y de $\operatorname{nul}\mathbf{A}^k$ adaptadas a esa descomposición.

Calcular las coordenadas, respecto de la base de $\operatorname{col}\mathbf{A}^k$, de la proyección del vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sobre sobre $\operatorname{col}\mathbf{A}^k$ a lo largo de $\operatorname{nul}\mathbf{A}^k$.

120. Demostrar que si $\mathbf{A}$ satisface $\mathbf{AP} = \mathbf{PA}$ para toda $\mathbf{P}$ invertible, entonces $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$ para algún λ .

121. Sabemos que la matriz $\mathbf{A}$ es semejante a la matriz

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & & 2 & & \\ & & & & & & & 7 & \\ & & & & & & & & 7 \end{bmatrix}.$$

Se pide calcular los autovalores de $\mathbf{A}$ y para cada uno de ellos, de forma razonada:

1. La multiplicidad algebraica de λ.
2. La multiplicidad geométrica de λ.
3. El índice k de $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$.
4. La dimensión de cada uno de los espacios

   $$E_j = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cap \operatorname{col}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^j,$$

   donde $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.
5. El rango de cada $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^j$.

122. Sea $\mathbf{L}$ una matriz nilpotente de orden k. Considérense los subespacios

$$E_j = \operatorname{nul}\mathbf{L} \cap \operatorname{col}\mathbf{L}^j \qquad \text{para cada} \quad j = k-1, k-2, \ldots, 2, 1, 0.$$

Demostrar:

1. Se verifica $E_j \subseteq E_{j-1}$ para todo j.
2. $E_{k-1} = \operatorname{col}\mathbf{L}^{k-1}$.

123. Sea λ un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ y sea k el índice de $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$. Considérense los subespacios

$$E_j = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cap \operatorname{col}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^j$$

para cada $j = k-1, k-2, \ldots, 2, 1, 0$. Demostrar:

1. Se verifica $\{\mathbf{0}\} = E_k \subseteq E_{k-1} \subseteq E_{k-2} \subseteq \cdots E_2 \subseteq E_1 \subseteq E_0 = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})$.

2. Utilizar la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

para estudiar si la igualdad $E_{k-1} = \operatorname{col}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^{k-1}$ es cierta en general.

3. Comprobar que

$$E_j \subseteq \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \subseteq \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^k$$

para todo j.

124. Sabemos que la matriz $\mathbf{A}$ tiene $\lambda = 3$ por único autovalor y que la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & 1 & & & \\ & & & & 3 & 1 & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & 3 & \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar, de forma razonada, los valores de:

1. La dimensión de $\operatorname{nul}(\mathbf{A} - 3\,\mathbf{I})$.
2. El índice k de $\mathbf{A} - 3\,\mathbf{I}$.
3. La dimensión de cada subespacio $E_j = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - 3\,\mathbf{I}) \cap \operatorname{col}(\mathbf{A} - 3\,\mathbf{I})^j$ y el rango de $(\mathbf{A} - 3\,\mathbf{I})^j$ para los $j \in \{k-1\,, k-2\,, \ldots, 2, 1\}$.