Ejercicios 10 a 14

10. [A] Calcular el polinomio $P_n(x)$ de Taylor en $x_0 = 0$, de grado $\leq 3n+2$, de la función

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt \qquad \text{de los} \quad x > -1\,.$$

Estudiar el límite, para cada x fijo, de

$$f(x) - P_n(x)$$

cuando $n \to \infty$.

11. [A] Calcular el polinomio $P_n(x)$ de Taylor en $x_0 = 0$, de grado $\leq 2n$, de la función

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$

Estudiar el límite, para cada x fijo, de

$$f(x) - P_n(x)$$

cuando $n \to \infty$.

12. [SS] Dada la función

$$f(x) = x^3\sqrt{|x|}\,,$$

calcular los posibles polinomios $P_n(x)$ de Taylor de grado $\leq n$ en $x_0 = 0$. Para cada uno de ellos comprobar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - P_n(x)}{x - 0} = 0\,.$$

13. Sean $0 < a < b$. Considérese la aproximación

$$\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \qquad \text{del valor de} \quad \sqrt{a+b}\,. \tag{2}$$

Comprobar que (2) es la aproximación obtenida utilizando el polinomio de Taylor de grado 1 de la función $\sqrt{x}$ en $x_0 = a$, evaluado en $a+b$. Demostrar que (2) es una aproximación por exceso. Estimar el error absoluto y el error relativo que comete esta aproximación.

14. [SS]

A. Escribir el polinomio

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3$$

en potencias de $x - 1$.

B. Escribir el polinomio

$$P(x) = 1 - 2\,(x-1) + 3\,(x-1)^2 + \frac{1}{2}\,(x-1)^3$$

en potencias de $x - 2$.

C. Utilizar el algoritmo de Horner para calcular el valor del polinomio

$$P(x) = -12 - x^2 - 4\,x^3 + x^4 + x^5$$

en $x_0 = \pm 1\,, \pm 2\,, \pm 3\,, \pm 4\,, \pm 6\,, \pm 12\,.$