$\boxed{14}$ Sea f: $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^2$ la aplicación lineal que cumple

$$f(1,0,0) = (1,1), f(0,1,0) = (2,-1), f(0,0,1) = (0,1)$$

Consideremos los e.v. R^3 , R^2 y en ellos las siguientes bases :

$$\mathbf{D}_3 = \{(1,1,1),(1,1,0),(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})\},\ \mathbf{D}_2 = \{(1,1),(1,0)\}$$

$$E_3 = \{(1,2,-1),(0,1,1),(-2,0,3)\}, E_2 = \{(1,2),(1,3)\}$$

i) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases canónicas.

ii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases D_3 y D_2.

iii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases E_3 y E_2.

$$f = i_{\mathrm{R}^2} \circ f \circ i_{\mathrm{R}^3} \quad : \underset{(C'_3)}{\mathrm{R}^3} \overset{i_{\mathrm{R}^3}}{\rightarrow} \underset{(C_{R^3})}{\mathrm{R}^3} \overset{f}{\rightarrow} \underset{(C_{R^2})}{\mathrm{R}^2} \overset{i_{\mathrm{R}^2}}{\rightarrow} \underset{(C'_2)}{\mathrm{R}^2}$$

$$\underbrace{P \qquad A \qquad Q^{-1}}_{B = Q^{-1}AP}$$

---

i) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases canónicas.

La **expresión matricial de f** respecto a las **bases canónicas**

$$Y = AX; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{C_{\mathrm{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{C_{\mathrm{R}^3}}$$

La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

$$A = M_f(C_{\mathrm{R}^3}, C_{\mathrm{R}^2}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La aplicación $f: \underset{(C_{\mathrm{R}^3})}{\mathrm{R}^3} \overset{f}{\rightarrow} \underset{(C_{\mathrm{R}^2})}{\mathrm{R}^2}$

tiene por ecuaciones respecto a las base canónicas a: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$

pues $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 f(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}) + x_2 f(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}) + x_3 f(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$

$$= x_1(\mathbf{1},\mathbf{1}) + x_2(\mathbf{2},\mathbf{-1}) + x_3(\mathbf{0},\mathbf{1})$$

$$= \left(\underbrace{x_1 + 2x_2}_{y_1},\ \underbrace{x_1 - x_2 + x_3}_{y_2} \right)$$

y deserrallando el producto

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

1

ii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases D_3 y D_2.

$\mathbf{D}_3 = \{(1,1,1),(1,1,0),(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0})\}$, $\mathbf{D}_2 = \{(1,1),(1,0)\}$

....

Si denotamos a $B = M_f(D_3, D_2)$ y a $A = M_f(C_{R^3}, C_{R^2})$

$$f = i_{\mathrm{R}^2}\ o\ f\ o\ i_{\mathrm{R}^3} \quad : \underset{(D_3)}{\mathrm{R}^3} \xrightarrow{i_{\mathrm{R}^3}} \underset{(C_{\mathrm{R}^3})}{\mathrm{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{(C_{\mathrm{R}^2})}{\mathrm{R}^2} \xrightarrow{i_{\mathrm{R}^3}} \underset{(D_2)}{\mathrm{R}^2}$$

$$\underbrace{P \qquad A \qquad Q^{-1}}$$

$\boxed{B = Q^{-1}AP}$ A y B son **matrices equivalentes**

Donde $P = M_{i_{\mathrm{R}^3}}(D_3, C_{\mathrm{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$Q = M_{i_{\mathrm{R}^3}}(D_2, C_{\mathrm{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M_{i_{\mathrm{R}^3}}(C_{\mathrm{R}^2}, D_2)$

Se verifica $\qquad B = Q^{-1}AP$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P}$$

Se dice que A y B son **matrices equivalentes**

Las ecuaciones matriciales de f respecto a las bases D_3 y D_2 son

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}_{D_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{D_3} \quad \text{donde } B = M_f(D_3, D_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

y (x'_1, x'_2, x'_3) son las coordenadas de un vector $\bar{x} \in \mathrm{R}^3$ en la base D_3
e (y'_1, y'_2) son las de un vector $\bar{y} \in \mathrm{R}^2$ en la base D_2

iii) Hallar las ecuaciones de f respecto de las bases D'_3 y D'_2.

$E_3 = \{(1,2,-1),(0,1,1),(-2,0,3)\},\ E_2 = \{(1,2),(1,3)\}$

Si denotamos a $B' = M_f(E_3,E_2)$ y a $A = M_f(C_{R^3},C_{R^2})$

$$f = i_{\mathrm{R}^2}\ o\, f\, o\ i_{\mathrm{R}^3} \qquad : \underbrace{\underset{(E_3)}{\mathrm{R}^3} \overset{i_{\mathrm{R}^3}}{\to} \underset{(C_{\mathrm{R}^3})}{\mathrm{R}^3}}_{P} \underbrace{\overset{f}{\to} \underset{(C_{\mathrm{R}^2})}{\mathrm{R}^2}}_{A} \underbrace{\overset{i_{\mathrm{R}^3}}{\to} \underset{(E_2)}{\mathrm{R}^2}}_{Q^{-1}}$$

$$\boxed{B' = Q^{-1}AP}$$

A y B' son **matrices equivalentes**

Donde ahora

$$P = M_{i_{\mathrm{R}^3}}(E_3,C_{\mathrm{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$Q = M_{i_{\mathrm{R}^2}}(E_2,C_{\mathrm{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = M_{i_{\mathrm{R}^2}}(C_{\mathrm{R}^2},E_2)$$

Se verifica $\quad B' = Q^{-1}AP$

$$\underset{B'}{\begin{pmatrix} 17 & 6 & -7 \\ -12 & -4 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{Q^{-1}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Se dice que A y B' son **matrices equivalentes**

Las ecuaciones matriciales de f respecto a las bases E_3 y E_2 son

$$\begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \end{pmatrix}_{E_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17 & 6 & -7 \\ -12 & -4 & 5 \end{pmatrix}}_{M_f(E_3,E_2)=B'} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}_{E_3} \quad \text{donde } B' = M_f(E_3,E_2) = \begin{pmatrix} 17 & 6 & -7 \\ -12 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

y (x''_1,x''_2,x''_3) son las coordenadas de un vector $\bar{x} \in \mathrm{R}^3$ en la base D'_3

e (y''_1,y''_2) las de un vector $\bar{y} \in \mathrm{R}^2$ en la base D'_2

3

HOJA 3.3

15 Sea el endomorfismo de R^3 definido por las ecuaciones :

$$y_1 = x_1, y_2 = x_1 - x_2 - x_3, y_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

donde (x_1,x_2,x_3) e (y_1,y_2,y_3) son respectivamente las coordenadas de un vector y su transformado mediante f en la base canónica C_{R^3}.

a)Determinar la matriz asociada a f respecto de la base canónica

b) Una base , unas ecuaciones paramètricas y unas ecuaciones implìcitas de $\ker f, Imf$

c)Obtener una base , unas ecuaciones paramètricas y unas ecuaciones implìcitas de

c1_$f(U)$ siendo $U = \{(x_1,x_2,x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

c2_$f(V)$ siendo $V = L(\{(1,1,-1),(2,1,0)\})$

c3_$f(W)$ siendo W el s.v. de R^3 determinado por las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 2\alpha, x_2 = \alpha, x_3 = -\alpha$$

d) Determinar la matriz asociada af respecto de la base $D = \{(2,1,-1),(1,-2,0),(-3,0,0)\}$

15_a Hallar las ecuaciones de f respecto de las base canónica.

La aplicación

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathrm{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathrm{R}^3 \\ & (B) & & (B) \\ & (x_1,x_2,x_3) & & (y_1,y_2,y_3) \end{array}$$

Tiene por ecuaciones respecto de la base canónica

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

y puede expresarse en la forma

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

y en expresión matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$M_f(C_{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15_d d Determinar la matriz asociada af respecto de la base

$D = \{(2,1,-1),(1,-2,0),(-3,0,0)\}$

....

Si denotamos $M_f(D) = B$ y $M_f(C_{R^3}) = A$

$$f = i_{\mathrm{R}^3} \; o \, f \, o \; i_{\mathrm{R}^3} \qquad : \underbrace{\underset{(D)}{\mathrm{R}^3} \overset{i_{\mathrm{R}^3}}{\underset{P}{\to}} \underset{(C_{\mathrm{R}^3})}{\mathrm{R}^3} \overset{f}{\underset{A}{\to}} \underset{(C_{\mathrm{R}^3})}{\mathrm{R}^3} \overset{i_{\mathrm{R}^3}}{\underset{P^{-1}}{\to}} \underset{(D)}{\mathrm{R}^3}}_{\boxed{B = P^{-1}AP}}$$

$\mathbf{A} = M_f(C_{R^3})$ y $\mathbf{B} = M_f(D)$ **son matrices semejantes**

Donde, $M_{i_{\mathrm{R}^3}}(D, C_{\mathrm{R}^3}) = P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, , P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$

Se verifica $B = P^{-1}AP$, es decir,

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}} = \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Se dice que A y B son matrices semejantes

$M_{i_{\mathrm{R}^3}}(D, C_{\mathrm{R}^3})$ es la matriz asociada a i_{R^3} respecto de las bases D y C_{R^3}

$P = M_{i_{\mathrm{R}^3}}(D, C_{\mathrm{R}^3})$ es la matriz del cambio de base C_{R^3} a D

15_b $\boxed{\ker f}$ **Nucleo** de **f** : $\ker f = f^{-1}(\bar{\mathbf{0}}) = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathrm{R}^3 \,/\, f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}\} \subset \mathrm{R}^3$

Ec. implicitas del nucleo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Hermite normal form: ( )

o equivalentemente $\left\{\begin{array}{ll} \textit{Ecuación } \mathrm{Ec}_1 & 0 = x_1 \\ \textit{Ecuación } \mathrm{Ec}_2 & 0 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \textit{Ecuación } \mathrm{Ec}_3 & 0 = x_1 + x_2 + x_3 \end{array}\right. \approx \left\{\begin{array}{ll} 0 = x_1 & \mathrm{Eca}_1 \\ 0 = x_2 + x_3 & \mathrm{Eca}_2 \end{array}\right.$ *Nuevas*

pues $\begin{array}{c} Ec_1 \\ Ec_2 \\ Ec_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_2 - 2F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \mathrm{Eca}_1 \\ \mathrm{Eca}_2 \\ \mathrm{Eca}_2 \end{array}$

Las ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 0 = x_1 \\ 0 = x_2 + x_3 \end{array}\right.$ son unas **ecuaciones implicitas** del nucleo

Resolviendo el sistema se obtienen las siguientes **ec. paramétricas** del nucleo

$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = -\alpha \end{array}\right.$ y por tanto: $\ker f = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$

Como $\dim \ker f = 1$, la aplicación f **no** es **inyectiva**

$\boxed{Imf}$ **Imagen de f** : $\mathrm{Im} f = f(\mathrm{R}^3) = \{f(\bar{\mathbf{x}}) \,/\, \bar{\mathbf{x}} \in \mathrm{R}^3\}$

Las columnas de la matriz $M_f(B,B)$ forman un sistema generador de $\mathrm{Im} f$

Por tanto $\mathrm{Im} f = L(\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1\}) = L(\{(1,1,0),(0,-1,1),(0,-1,1)\})$

$\{\bar{v}_1 = (1,1,1), \bar{v}_2 = (0,-1,1)\}$ es un **sistema generador** de $\mathrm{Im} f$

Buscamos una base

$\begin{array}{c} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_2 - 2F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una base de *Imf* es $B_{\mathrm{Im} f} = \{(1,1,1),(0,-1,1)\}$

O bien, también es base *Imf* es $B'_{\mathrm{Im} f} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

$$\mathrm{Im} f = L(\{(1,1,1),(0,-1,1)\}) = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) \,/\, \alpha, \beta \in R\}$$

Luego unas **ec. paramétricas** de $\mathrm{Im} f$ son $\left\{\begin{array}{l} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta \\ y_3 = 0 \end{array}\right. \quad \alpha, \beta \in \mathrm{R}$,

y de aqui se obtienen unas **ecuaciones implicitas** del s.v. $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{R}^3$:

$$y_3 = 0$$

f no es suprayectiva $\mathrm{Im} f = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\}) \neq \{\bar{0}\}$ **6**

15_c Obtener una base , unas ecuaciones paramètricas y unas ecuaciones implìcitas de

c1_$f(U)$ siendo $U = \{(x_1,x_2,x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

c2_$f(V)$ siendo $V = L(\{(1,1,-1),(2,1,0)\})$

c3_$f(W)$ siendo W el s.v. de R^3 determinado por las ecuaciones paramétricas

$x_1 = 2\alpha, x_2 = \alpha, x_3 = -\alpha$

d) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base $D = \{(2,1,-1),(1,-2,0),(-3,0,0)\}$

15_c_c1 Obtener una base , unas ecuaciones paramètricas y unas ecuaciones implìcitas de

c1_$f(U)$ siendo $U = \{(x_1,x_2,x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

$\boxed{U}$ $U = \{(x_1,x_2,x_3) / x_1 - x_2 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

Las ecuaciones implicitas del s.v. U son

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtienen unas e**cuaciones paramétricas** de U

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 3\alpha \end{array}\right. \quad \text{y una b**ase** para U: } B_U = \{(1,1,3)\}$$

y podemos expresar $U = L(\{(1,1,3)\})$

....

$\boxed{f(U)}$: $f(U) = \{f(\bar{\mathbf{x}}) / \bar{\mathbf{x}} \in U\} = L(\{f(1,1,3)\}) = L\{(1,-3,5)\}$

Pues $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Luego unas **ec. paramétricas** de $f(U)$ son $\left\{\begin{array}{l} y_1 = \alpha \\ y_2 = -3\alpha \\ y_3 = 5\alpha \end{array}\right. \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

y de aqui se obtienen unas **ecuaciones implicitas** del s.v. $f(U) \subset \mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{l} y_2 + 3y_1 = 0 \\ y_3 - 5y_1 = 0 \end{array}\right.$$

7

15_c_c2 **Obtener una base , unas ecuaciones paramètricas y unas ecuaciones implìcitas de** V

c2_ $f(V)$ **siendo** $V = L(\{(1,1,-1),(2,1,0)\})$

$\boxed{V}$ $V = \{\alpha(1,1,-1) + \beta(2,1,0) \ / \ \alpha,\beta \in R\} = \{(\alpha,\alpha,-\alpha) + (2\beta,\beta,0) \ / \ \alpha,\beta \in R\}$

....

$\boxed{f(V)}$ $: f(V) = \{f(\overline{\mathbf{x}}) \ / \ \overline{\mathbf{x}} \in V\} = L(\{f(1,1,-1), f(2,1,0)\})$

Teniendo en cuenta que

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$f(V) = L(\{f(1,1,-1), f(2,1,0)\}) = L(\{(1,1,1),(2,1,3\})$

Luego unas **ecuaciones**. **paramétricas** de $f(V)$ son

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + 2\beta \\ y_2 = \alpha + \beta & \alpha,\beta \in \mathrm{R} \quad , \\ y_3 = \alpha + 3\beta \end{cases}$$

Observamos que

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + 2\beta \\ y_2 = \alpha + \beta \\ y_3 = \alpha + 3\beta \end{cases} \approx \begin{cases} y_1 \qquad = \alpha + 2\beta \\ y_2 - y_1 = \quad -\beta \\ y_3 - y_1 = \quad \beta \end{cases} \approx \begin{cases} y_1 \qquad = \alpha + 2\beta \\ y_2 - y_1 = \quad -\beta \\ (y_3 - y_1) + (y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

y de aqui se obtienen unas **ecuaciones implicitas** del s.v. $f(V) \subset \mathrm{R}^3$

$$2y_1 - y_2 - y_3 = 0$$

8

$\boxed{\textbf{15\_c\_c3}}$ **Obtener una base** , **unas ecuaciones paramètricas y unas ecuaciones implìcitas de**

$\boxed{\textbf{c3}}$_$f(W)$ **siendo** W el s.v. de R^3 **determinado por las ecuaciones paramétricas**

$$\begin{cases} y_1 = 2\alpha \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = -\alpha \end{cases}$$

$\boxed{W}$ $W = \{(2\alpha, \alpha, -\alpha) \ / \ \alpha \in R\} = L(\{(2,1,-1)\})$

Una base del s.v W es . $B_W = \{(2,1,-1)\}$

y de aqui se obtienen unas ec**uaciones implicitas** del s.v. W

$$\begin{cases} 2y_2 - y_1 = 0 \\ 2y_3 + y_1 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{f(W)}$: $f(W) = \{f(\overline{\mathbf{x}}) \ / \ \overline{\mathbf{x}} \in W\} = L(\{f(2,1,-1)\})$

Teniendo en cuenta que

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$f(W) = L(\{f(2,1,-1)\}) = L(\{(2,2,2)\}) = L(\{(1,1,1)\})$

Luego unas **ecuaciones**. **paramétricas** de $f(W)$ son

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathrm{R} \quad ,$$

Observamos que

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = \alpha \end{cases} \approx \begin{cases} y_1 \quad = \alpha \\ y_2 - y_1 = 0 \\ y_3 - y_1 = 0 \end{cases}$$

y de aqui se obtienen unas **ecuaciones implicitas** del s.v. $f(W) \subset \mathrm{R}^3$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ y_3 - y_1 = 0 \end{cases}$$

9

HOJA 3.2 | 16 | Se define la aplicación lineal $f: V_3 \to V_4$ de forma que $f(\bar{e}_1-\bar{e}_3) = \bar{u}_1$, $f(\bar{e}_2-\bar{e}_3) = \bar{u}_1-\bar{u}_2$, $f(2\bar{e}_3) = 2\bar{u}_1+2\bar{u}_3$, donde $C_3 = \{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ es una base del e.v. V_3 y $C_4 = \{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{u}_4\}$ es una base del e.v. V_4

i) Hallar la asociada a f respecto de las bases C_3 y C_4

ii) Hallar una base,unas ecuaciones implícitas y paramétricas de los subespacios vectoriales $\ker f, \operatorname{Im} f$

iii) Obtener $f(U)$ siendo $\boldsymbol{U} = \{(x_1,x_2,x_3) / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

iv) Obtener $M_f(D_3,C_4)$ .donde $D_3 = \{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_3\}$ es una base de V_3 donde $\overline{w}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \overline{w}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \overline{w}_3 = \bar{e}_2$

v) Obtener $M_f(D_3,D_4)$donde $D_4 = \{\overline{m}_1,\overline{m}_2,\overline{m}_3,\overline{m}_4\}$ es una base de V_4 donde $\overline{m}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \overline{m}_2 = \bar{u}_1 - \bar{u}_3, \overline{m}_3 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_4$, $\overline{m}_4 = \bar{u}_3 - \bar{u}_4$

vi) Obtener $M_f(C_3,E_4)$ .donde $E_4 = \{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3,\bar{v}_4\}$ es una base de V_4 donde $\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{u}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \bar{u}_3 = \bar{v}_3 + \bar{v}_4$, $\bar{u}_4 = \bar{v}_4$

16_i) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases C_3 y C_4

La aplicación

$$\begin{array}{ccc} f: V_3 & \xrightarrow{f} & V_4 \\ (C_3) & & (C_4) \\ (x_1,x_2,x_3)_{C_3} & & (y_1,y_2,y_3,y_4)_{C_4} \end{array}$$

Trabajando con coordenadas en las bases $C_3 = \{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ y $C_4 = \{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{u}_4\}$

Observamos que $\bar{e}_1 - \bar{e}_3 = (1,0,1)_{C_3}$, $\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = (0,1,-1)_{C_3}, 2\bar{e}_3 = (0,0,2)_{C_3}$

$\bar{u}_1 = (1,0,0,0)_{C_4}, \bar{u}_2 = (0,1,0,0)_{C_4}, \bar{u}_1 - \bar{u}_2 = (1,-1,0,0)_{C_4}$, $2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_3 = (2,0,2,0)_{C_4}$

Por tanto, trabajando con coordenadas en C_3 y C_4 se tiene

$f(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1$, $\qquad f(1,0,-1)_{C_3} = (1,0,0,0)_{C_4}$

$f(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$, $\qquad f(0,1,-1)_{C_3} = (1,-1,0,0)_{C_4}$

$f(2\bar{e}_3) = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_3$, $\qquad f(0,0,2)_{C_3} = (2,0,0,2)_{C_4}$

Y de aqui

$$\left.\begin{array}{ll} E_1 & (1,0,0,0)_{C_4} = f(1,0,-1)_{C_3} = f(1,0,0)_{C_3} - f(0,0,1)_{C_3} \\ E_2 & (1,-1,0,0)_{C_4} = f(0,1,-1)_{C_3} = f(0,1,0)_{C_3} - f(0,0,1)_{C_3} \\ E_3 & (2,0,2,0)_{C_4} = f(0,0,2)_{C_3} = 2f(0,0,1)_{C_3} \end{array}\right\} \underset{\substack{E_3 \to \frac{1}{2}E_3 \\ E_1 \to E_1+E_3 \\ E_2 \to E_2+E_3}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0)_{C_3} = (1,0,0,0)_{C_4} + f(0,0,1)_{C_3} \\ f(0,1,0)_{C_3} = (1,-1,0,0)_{C_4} + f(0,0,1)_{C_3} \\ f(0,0,1)_{C_3} = (1,0,1,0)_{C_4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} f(1,0,0)_{C_3} = (1,0,0,0)_{C_4} + (1,0,1,0)_{C_4} = (2,0,1,0)_{C_4} \\ f(0,1,0)_{C_3} = (1,-1,0,0)_{C_4} + (1,0,1,0)_{C_4} = (2,-1,1,0)_{C_4} \\ f(0,0,1)_{C_3} = (1,0,1,0)_{C_4} \end{array}\right\}$$

La matriz asociada a f respecto de lasbases $C_3\, yC_4$ es $A = M_f(C_3,C_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$10

Las ecuaciones de f en las bases C_3 y C_4 son

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_{C_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_f(C_3,C_4)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{C_3} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad -x_2 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{16\_ii)}}$ $\boxed{\ker f}$ **Nucleo** de **f** : $\ker f = f^{-1}(\bar{\mathbf{0}}) = \{\bar{\mathbf{x}} \in V_3 \,/\, f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{0}}\} \subset V_2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{C_4} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{C_3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 0 = -x_2 \\ 0 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Resolviendo el sistema se tiene $0 = x_1 = x_2 = x_3$.

Luego $\ker f = \{\bar{\mathbf{0}}\} = \{(0,0,0)\}$

$\boxed{\operatorname{Im} f}$ **Imagen de f** :

$\operatorname{Im} f = f(V_3) = \{f(\bar{\mathbf{x}}) \,/\, \bar{\mathbf{x}} \in V_3\} = L(\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3)\})$

$$= L\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Una base de $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$

Unas ecuaciones implicitas : $\operatorname{Im} f$: $y_4 = 0$

11

$\boxed{16\_iii)}$ Obtener $f(U)$ siendo $\boldsymbol{U} = \{(x_1,x_2,x_3) / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

$\boldsymbol{U} = \{(x_1,x_2,x_3) / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} = L(\{(1,1,0),(1,0,1)\})$

Una base de U es $B_U = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$

$f(U) = L(\{f((1,1,0)), f((1,0,1))\})$

Calculando la imagen de los elemento de una base de U

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(U) = L(\{f((1,1,0)), f((1,0,1))\}) = L(\{(4,-1,2,0),(3,0,2,0)\})$

Una base de $f(U)$: $B_{f(U)} = \{(4,-1,2,0),(3,0,2,0))\}$

Unas ecuaciones implicitas de $f(U)$: $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$

$\boxed{16\_iv)}$ Obtener $M_f(D_3, C_4)$ .donde $D_3 = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$ es una base de V_3 donde

$\overline{w}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2, \overline{w}_2 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3, \overline{w}_3 = \overline{e}_2$

$$A = M_f(C_3, C_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = M_f(D_3, C_4)$

$$f = f \circ i_{\mathbb{R}^3} \quad : \underset{(D_3)}{V_3} \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^3}} \underset{(C_3)}{V_3} \xrightarrow{f} \underset{(C_4)}{V_4}$$

$$\underbrace{P \qquad A}_{B = AP}$$

La nueva base $D_3 = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$

$$\begin{cases} \overline{w}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 \\ \overline{w}_2 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{w}_3 = \overline{e}_2 \end{cases} \text{Con coord en } C_3 \begin{cases} \overline{w}_1 = (1,-1,0)_{C_3} \\ \overline{w}_2 = (0,1,1)_{C_3} \\ \overline{w}_3 = (0,1,0)_{C_3} \end{cases} \text{y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = M_f(D_3, C_4) = AP = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 12$$

$\boxed{\textbf{16v}}$) Obtener $M_f(D_3,D_4)$donde $D_4 = \{\overline{m}_1,\overline{m}_2,\overline{m}_3,\overline{m}_4\}$ es una base de V_4 donde $\overline{m}_1 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \overline{m}_2 = \overline{u}_1 - \overline{u}_3, \overline{m}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_4\ , \overline{m}_4 = \overline{u}_3 - \overline{u}_4$

$$\underset{(C_3)}{V_3} \xrightarrow{f} \underset{(C_4)}{V_4};\ A = M_f(C_3,C_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Buscamos $B = M_f(D_3,D_4)$

Nueva base de V_3 , $D_3 = \{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\overline{w}_3\}$. Del apartado anterior

$$\begin{cases} \overline{w}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 \\ \overline{w}_2 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{w}_3 = \overline{e}_2 \end{cases} \text{ Con coordenedas en } C_3 \begin{cases} \overline{w}_1 = (1,-1,0)_{C_3} \\ \overline{w}_2 = (0,1,1)_{C_3} \\ \overline{w}_3 = (0,1,0)_{C_3} \end{cases}$$

Del apartado anterior conocemos $:\underbrace{\underset{(D_3)}{V_3} \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^3}} \underset{(C_3)}{V_3}}_{P}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La nueva base de V_4 , $D_4 = \{\overline{m}_1,\overline{m}_2,\overline{m}_3,\overline{m}_4\}$ esta definida por

$$\begin{cases} \overline{m}_1 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \\ \overline{m}_2 = \overline{u}_1 - \overline{u}_3 \\ \overline{m}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_4 \\ \overline{m}_4 = \overline{u}_3 - \overline{u}_4 \end{cases} \text{ Coordenedas en } C_4 \begin{cases} \overline{m}_1 = (1,1,0,0)_{C_4} \\ \overline{m}_2 = (1,0,-1,0)_{C_4} \\ \overline{m}_3 = (1,1,0,1)_{C_4} \\ \overline{m}_2 = (0,0,1,-1)_{C_4} \end{cases}$$

Conocemos

$$\underbrace{\underset{(D_4)}{V_4} \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^4}} \underset{(C_4)}{V_4}}_{Q},\ Q = M_f(D_4,C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = i_{\mathbb{R}^4}\ o\ f\ o\ i_{\mathbb{R}^3} \quad :\underset{(D_3)}{V_3} \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^3}} \underset{(C_3)}{V_3} \xrightarrow{f} \underset{(C_4)}{V_4} \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^4}} \underset{(D_4)}{V_4}$$

$$\underbrace{P \qquad A \qquad Q^{-1}}_{B=Q^{-1}AP}$$

$B = M_f(D_3,D_4) = Q^{-1}AP =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad 13$$

16vi v) Obtener $M_f(C_3,E_4)$ .donde $E_4 = \{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3,\bar{v}_4\}$ es una base de V_4 donde

$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \bar{u}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3, \bar{u}_3 = \bar{v}_3 + \bar{v}_4 , \bar{u}_4 = \bar{v}_4$

$C_3 = \{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$es una base del e.v. V_3 y
$C_4 = \{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{u}_4\}$ es una base del e.v. V_4

....

$$\underset{(C_3)}{V_3} \xrightarrow{f} \underset{(C_4)}{V_4} \xrightarrow{i_{\mathbb{R}^4}} \underset{(E_4)}{V_4}$$

$Q = M_f(E_4,C_4); Q^{-1} = M_f(C_4,E_4)$

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 : (1,-1,0,0)_{E_4} \\ \bar{u}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_3 : (0,1,1,0)_{E_4} \\ \bar{u}_3 = \bar{v}_3 + \bar{v}_4 : (0,0,1,1)_{E_4} \\ \bar{u}_4 = \qquad \bar{v}_4 : (0,0,0,1)_{E_4} \end{cases} \qquad Q^{-1} = M(C_4,E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underset{(C_3)}{V_3} \xrightarrow[A]{f} \underset{(C_4)}{V_4} \xrightarrow[Q^{-1}]{i_{\mathbb{R}^4}}}_{B=Q^{-1}A} \underset{(E_4)}{V_4}$$

....14