Mat II (GIB) - 7/6/2017 TEST (20 puntos)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 30 minutos**

Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo, una opción por pregunta.

Puntuación: Correcto: $+2,5$. Error: -0.5. En blanco: 0.

	SÍ	NO	
1.	$\times$		Considérese $p(x) = x^{17} - 3x^{12} + 83x^9 - 27x^5 + 1$. Su polinomio de Taylor de orden 11 centrado en 0 es $83x^9 - 27x^5 + 1$.
2.		$\times$	Sean $f \in C^5(0,1)$ y $c \in (0,1)$ tales que $f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = f^{(4)}(c) = 0$, pero $f^{(5)}(c) = 1$. Entonces, f tiene un mínimo local en c.
3.	$\times$		Si $f : (-2\pi, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable, entonces f es integrable en $[-\pi, \pi]$.
4.	$\times$		Sea $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Mediante el cambio de variable $t = \cos x$, tenemos que $$\int_0^{\pi/4} f(\cos x)\, dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\,.$$
5.		$\times$	Toda sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n < a_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$ que esté acotada inferiormente es convergente.
6.		$\times$	La suma de la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n}$ es -3.
7.	$\times$		La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^{4n}}{(7n^4 + 5n^3 + 3n^2 - n - 1)^n}$ es convergente.
8.	$\times$		Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. El hecho de que existan todas las derivadas direccionales de f en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ no implica que f sea diferenciable en (x_0, y_0).

Mat II (GIB) - 7/6/2017 Problema 1 (10 puntos)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 20 minutos**

Comience a responder EN ESTA HOJA.
Las respuestas sin justificar recibirán muy poca o ninguna puntuación.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Razone que f es continua.
2. Calcule el polinomio de Taylor de grado cuatro en 0 de la función $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$.
3. Calcule el siguiente límite:
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x f^2(t) - 1\, dt}{x^3}.$$

Solución:

1. f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser un cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Como $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, la función f es continua.

2. Calculamos las primeras seis derivadas de g:
$$g'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)\,.$$
$$g''(x) = 2\cos(2x)\,.$$
$$g'''(x) = -4\operatorname{sen}(2x)\,.$$
$$g^{(4)}(x) = -8\cos(2x)\,.$$

El polinomio de Taylor de grado 4 de g en 0 es, por tanto:
$$P_4(g;0)(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 = \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3}\,.}$$

Otra alternativa es la siguiente: Puesto que el alumno debería conocer cómo es el polinomio de Taylor de orden n centrado en cero de la función seno, se tiene inmediatamente:
$$P_4(\operatorname{sen};0)(x) = x - \frac{x^3}{3!}\,.$$

El polinomio de Taylor de orden 4 centrado en 0 de la función $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ tiene por términos aquéllos del cuadrado de $P_4(\operatorname{sen};0)(x)$ con grado menor o igual que 4. Como
$$\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{x^6}{(3!)^2}\,,$$

obtenemos que

$$P_4(g;0)(x) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} = \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3}\,.}$$

3. Como f es una función continua, tenemos que $f^2(t)-1$ es continua. Así, el numerador es una función derivable en $(0,+\infty)$. El denominador es un polinomio y, por tanto, derivable en $(0,+\infty)$, y no se anula en dicha semirrecta. Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{f(t)}{t^2} - 1\,dt = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0$. Estamos en las hipótesis de la regla de L'Hôpital. Como, por el teorema de Taylor,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f^2(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x^2 - \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2} - 1}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2) - 1}{3x^2} = \frac{-1}{9}\,,$$

la regla de L'Hôpital garantiza que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x f^2(t) - 1\,dt}{x^3} = \frac{-1}{9}\,.$$

Si en lugar de poner $o(x^4)$, ponemos el resto de Lagrange: $\frac{g^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{16\operatorname{sen}(2\xi)}{5!}x^5$ para cierto $\xi \in (0,x)$, aparece el término $\frac{16\operatorname{sen}(2\xi)x^3}{3\cdot 5!x^2} = \frac{16\operatorname{sen}(2\xi)x}{3\cdot 5!}$. Como $0 < \xi < x$, el límite de esta expresión cuando $x \to 0^+$ es cero.

$\square$

Mat II (GIB) - 7/6/2017 Problema 2 (5 puntos)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 20 minutos**

Comience a responder EN ESTA HOJA.
Las respuestas sin justificar recibirán muy poca o ninguna puntuación.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que si f es continua en $(0,0)$, entonces está localmente acotada en $(0,0)$.

Solución: Sea $\varepsilon = 1 > 0$. Como f es continua en $(0,0)$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|(x,y)\| < \delta$, entonces $|f(x,y) - f(0,0)| < 1$. Así, si $0 < \|(x,y)\| < \delta$, entonces

$$|f(x,y)| - |f(0,0)| \leq |f(x,y) - f(0,0)| < 1\,,$$

de donde $|f(x,y)| < |f(0,0)| + 1$. Como para $(x,y) = (0,0)$ también verifica esta desigualdad, concluimos que f está acotada en $B_\delta(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| < \delta\}$ y, por tanto, está localmente acotada en $(0,0)$. $\square$

Mat II (GIB) - 7/6/2017 Problema 3 (10 puntos)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 20 minutos**

Comience a responder EN ESTA HOJA.
Las respuestas sin justificar recibirán muy poca o ninguna puntuación.

Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Estúdiese la continuidad de f.
2. Calcúlense, donde existan, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. Calcúlense las derivadas direccionales $D_u f(0,0)$ para todo vector unitario $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.
4. Demuestre que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

1. En el abierto $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la función f es un cociente de polinomios y el denominador no se anula, luego f es continua en R. Como $(0,0)$ es punto de acumulación del dominio, podemos caracterizar la continuidad en él mediante límites. Dado que

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,,$$

el criterio del sándwich garantiza que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0.$$

Por lo tanto, f es también continua en $(0,0)$.

Otra alternativa es la siguiente:

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \right| = |r|\,|\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta| \leq |r| \underset{r\to0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Por el criterio del sándwich, concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

2. En el abierto $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la función f, al ser una función racional con denominador no nulo, tiene derivadas parciales, que vienen dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$

mientras que en $(0,0)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\\
\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f tiene derivadas parciales en todo su dominio.

3. La derivada direccional en $(0,0)$ según la dirección $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^\top$ son:

$$\begin{aligned}
D_u f(0,0) = D_{(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)^\top} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\theta, 0+t\operatorname{sen}\theta)-f(0,0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t\cos\theta\; t^2\operatorname{sen}^2\theta}{t^2\cos^2\theta + t^2\operatorname{sen}^2\theta} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{t^3}\\
&= \lim_{t\to 0}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta.
\end{aligned}$$

4. Si f fuera diferenciable en $(0,0)$, debería cumplirse que, para $\theta\in[0,2\pi)$,

$$D_{(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)^\top}(0,0) = \nabla f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix} = (0,0)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix} = 0\,.$$

Pero si $\theta \notin \left\{\frac{k\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$, entonces $D_{(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)^\top} f(0,0) = \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \neq 0$. Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Otra forma de verlo es la siguiente: Para $\theta\in[0,2\pi)$, el vector $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta)^\top$ es tangente a la curva sobre la gráfica de f dada por $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)^\top$. Como hay tres de ellos linealmente independientes, por ejemplo, $(1,0,0)^\top$, $(0,1,0)^\top$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^\top$, la función f no puede ser diferenciable en $(0,0)$.

Otra alternativa más consiste en usar la definición de función diferenciable en un punto. Debe cumplirse que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0\,,$$

pero si consideramos la semirrecta $y = x$ con $x>0$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,x)}{\|(x,x)\|} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x^3}{2x^2}}{\sqrt{2}\,x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\neq 0\,,$$

luego f no puede ser diferenciable en $(0,0)$.

$\square$