Comunicación de datos
Curso 2016/17, Problemas # 3

1. Calcule la capacidad de los canales con matrices de probabilidades de transición:

a)

$$\begin{pmatrix} q-\epsilon & p-\epsilon & 2\epsilon \\ p-\epsilon & q-\epsilon & 2\epsilon \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} q-\epsilon & p-\epsilon & 2\epsilon & 0 \\ p-\epsilon & q-\epsilon & 0 & 2\epsilon \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n & \varepsilon & \varepsilon & & & & \\ & & & & \varepsilon & \varepsilon & p_n & \dots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 1-\epsilon & & & & \\ \epsilon & & 1-\epsilon & & & \\ & & & 1-\epsilon & & \epsilon \\ & & & & 1-\epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$$

e)

$$Q_{M\times(M+2)} = \begin{pmatrix} 1-\epsilon & 0 & \dots & \dots & \epsilon & 0 \\ 0 & 1-\epsilon & \dots & \dots & 0 & \epsilon \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \dots & 1-\epsilon & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1-\epsilon & 0 & \epsilon \end{pmatrix}; \text{ M par}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

si se sabe que se alcanza cuando son equiprobables las entradas con dos transiciones no nulas.

2. Sean X e Y las variables aleatorias que representan la entrada y la salida, respectivamente, de un canal discreto sin memoria.

a) Calcule $H(X\,|\,Y)$ si la función de masa de probabilidad conjunta está dada por la siguiente matriz

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4q & & & & 4p \\ & 2q & & & 2p \\ & & q & & p \\ & & & q & p \end{pmatrix}, \quad p>0, q>0, p+q=1.$$

b) Calcule la capacidad del canal.

3. Demuestre que en un canal $C=0$ si y sólo si las filas de su matriz de probabilidades de transición son todas iguales. ¿Cuál es la interpretación de este hecho desde el punto de vista del receptor?

4. Los mensajes de una fuente con un alfabeto de 48 símbolos equiprobables se transmiten a través de un canal binario simétrico con probabilidad de error $p=0{,}2$.

a) Para transmisión fiable, ¿cuál es el número medio mínimo de símbolos binarios necesarios para transmitir un símbolo de la fuente?

b) En ese caso, ¿qué fracción de esos símbolos es redundante?

c) Y si el régimen del canal es de 100 símbolos por unidad de tiempo, ¿qué cantidad de información (expresada en bits) se transmite por unidad de tiempo?

5. Considere un sistema de transmisión formado por una fuente ternaria uniforme, un canal cuaternario y codificadores de fuente y de canal ideales.

a) Si se sabe que 1/3 de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes, ¿cuál es su capacidad en bits?

b) Si el coste de uso del canal (i.e., el coste de transmisión de un símbolo) es unitario, ¿cuál será el coste de transmitir un mensaje de la fuente de longitud $n \gg 1$?

6. Considere el canal k-ario con probabilidades de transición

$$p(y \mid x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } y = x \\ \frac{1}{3} & \text{si } y = (x+1) \mod k. \end{cases}$$

Suponga una fuente que genera k símbolos de manera que uno de los símbolos se transmite con probabilidad 1/2 y la probabilidad de transmisión de todos los demás es la misma. Sea $k = 65$ y considere la utilización de codificadores de fuente y canal para una transmisión fiable y eficiente.

a) ¿Sería necesario un código de fuente? ¿Cuál sería la tasa de codificación ideal de canal?

b) ¿Cuántas fuentes independientes como la dada podrían multiplexarse si la tasa de transmisión del canal fuese diez veces mayor que la de cada una de las fuentes?

c) Y si el canal fuese binario ideal y el codificador compacto para símbolos de la fuente de uno en uno, ¿cuántas fuentes podrían multiplexarse?

7. Sea una fuente que genera n símbolos equiprobablemente cuyos mensajes se precodifican con un código compacto binario de $\eta = 0{,}9$. Si se quieren transmitir esos mensajes precodificados de manera fiable y eficiente a través de un canal binario de capacidad C bits y régimen de transmisión v_c bits/s, ¿cuántos símbolos de canal serán necesarios por cada símbolo del mensaje precodificado?

8. Considere infinitas fuentes independientes e idénticamente distribuidas de igual entropía $H(X)$ y tasa $v_i = 2^{-i}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$ Si queremos transmitir sobre un canal de tasa unitaria y $C = H(X)$ los mensajes del mayor número posible de fuentes, ¿cuál es la mayor de las tasas de transmisión de las fuentes que transmiten sobre el canal?

9. La colección de fuentes independientes $i = 1, \ldots, n$ con entropía $H(X_i) = H(X_1) + (i-1)$ bits y régimen de emisión $v_i = v_1/2^{i-1}$ símbolos por segundo comparten un canal ternario sin memoria de capacidad 3/4 la del ideal y régimen de transmisión v_c.

a) Si la transmisión es fiable y eficiente, y el canal se utiliza al completo, ¿cuál es el valor de v_c? Tome $H(X_1) = 1$ bit y $v_1 = 1$. Puede dejar indicadas las series que aparezcan.

b) Supuesto que el canal se emplea el 100 % del tiempo, ¿qué fracción de uso le corresponde a la fuente i-ésima?

10.

a) ¿Podría conocer la capacidad de un canal si se sabe que para transmitir los mensajes (idealmente codificados) de una fuente dada precisa un tiempo de transmisión un 10 % mayor que el necesario con un canal ideal de idéntico alfabeto y régimen de transmisión?

b) Suponga que el operador de un canal de transmisión ideal cobra por tiempo de uso del mismo. Si sabe que para la transmisión de los mensajes de una fuente X_1 (idealmente codificados) se paga una unidad monetaria por símbolo del mensaje original, ¿cuánto se pagaría para la transmisión de los mensajes de una fuente X_2 de entropía doble si se codifica con una eficiencia del 90 %?

11. Suponga una fuente binaria sin memoria de entropía máxima. Suponga que se considera la utilización simultánea de dos canales para la transmisión de los mensajes de la fuente en el menor tiempo posible. Sea uno un canal binario de capacidad 0,6 bits, y el otro un canal ternario de capacidad 0,9 unidades de información ternarias. Si el primero de los canales tiene un régimen de transmisión de 1000 símbolos por segundo y el segundo de 500 símbolos por segundo, ¿cuál es el tiempo mínimo necesario para transmitir de manera fiable un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente grande?

12. Dada la fuente X, de rango $\mathcal{X} = \{i \in \mathbb{Z}^+ : i \leq 4\}$ y función de masa de probabilidad $p_i = \mathbb{P}(X = i) = 2^{-i}$ para $i < 4$, y un canal cuaternario con borrado con probabilidad de error p en la transmisión de cada símbolo:

a) Determine la información media transmitida por cada símbolo de la fuente cuando se usa directamente el canal (es decir, sin ninguna codificación).

b) Si el coste de transmisión de un símbolo por el canal dado es unitario, ¿cuánto estaríamos dispuestos a pagar por un canal cuaternario fiable si queremos transmitir fielmente un mensaje arbitrariamente largo y no importa el tiempo de transmisión?

c) Si el régimen de transmisión de ambos canales es idéntico y los costes son los del apartado anterior, ¿cuánto costaría transmitir un mensaje de la fuente de n (arbitrariamente grande) símbolos si se usasen simultáneamente los dos canales?

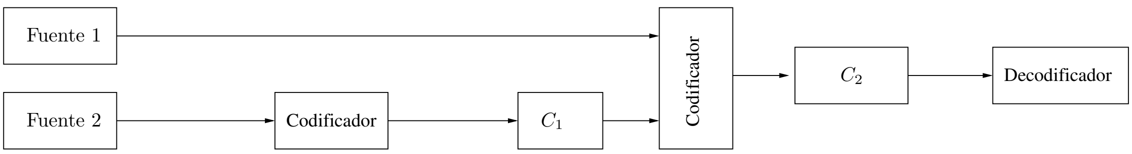
13. Se tienen n fuentes uniformes independientes X_i, $i = 1, \ldots, n$ con entropía $H(X_i) = 2^i$ bits y regímenes de emisión $v_{f_i} = k\,2^{-i}$ símbolos por unidad de tiempo. Sus símbolos se deben transmitir de forma fiable y eficiente usando simultáneamente dos canales idénticos de capacidad $C = 1$ bit y tasa de transmisión unitaria.

a) Acote superiormente la constante k.

b) Si cada fuente ha de transmitir un mensaje de longitud n arbitrariamente grande, ¿cuál ha de pagar más?

14. En cierto sistema de comunicaciones, los mensajes de una fuente discreta sin memoria X_1 de entropía 10 bits por símbolo y tasa de transmisión v_1 se transmiten a través de un canal binario de capacidad 0,9 bits/símbolo y régimen 1000 símbolos/s. La salida de este canal se multiplexa con otras dos fuentes, X_2 y X_3, de entropías $H(X_2) = H(X_3) = 10$ bits por símbolo y velocidades $v_2 = 50$ y $v_3 = 25$ símbolos/s, y los mensajes multiplexados se transmiten por otro canal de capacidad C_2 cuya tasa de transmisión es de 5000 símbolos/s. Si el receptor ha de recuperar fidedignamente los mensajes de las tres fuentes, acote los valores de v_1 y C_2.

15. Considere el sistema de comunicaciones de la figura, en donde C_1 es un canal binario de capacidad 2/3 bit/símbolo y régimen 10^6 símbolos por segundo y C_2 es un canal ternario de capacidad igual a 0,8 unidades ternarias por símbolo y mismo régimen de uso, 10^6 símbolos por segundo. Las fuentes son discretas, sin memoria e independientes, y generan respectivamente símbolos de entropía $H(X_1) = 3$ bits y $H(X_2) = 4$ bits. Los codificadores realizan las codificaciones necesarias ideales.



a) Si v_1 y v_2 denotan, respectivamente, las tasas de emisión de símbolos por parte de las fuentes 1 y 2, caracterice la región $\mathcal{R} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_+\}$ en la que es posible la transmisión fiable de los mensajes de ambas fuentes.

b) Suponga que se añade un decodificador entre la salida de C_1 y el codificador siguiente, y sea $\mathcal{R}^*$ la colección de pares (v_1, v_2) para los cuales la transmisión fiable es posible en el nuevo sistema. ¿Es cierto que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$? Razone la respuesta.