Comunicación de datos
Curso 2016/17, Problemas # 2

1. (Cotas de códigos)

a) Un código D-ario unívocamente decodificable consta de palabras de longitudes 1, 1, 2, 2, 3 y 3. Obtenga una buena cota inferior para D.

b) Dada una fuente ternaria con símbolos de probabilidades $(1/2, 1/3, 1/6)$, si se codifican grupos de veinte símbolos de la fuente, dé una buena cota superior de la longitud del código.

2. La sonda espacial Juno alcanzó la órbita del planeta Júpiter el pasado 5 de julio de 2016. Desde entonces, Juno transmite imágenes de alta resolución de la superficie de Júpiter hacia la Tierra a través de un canal de comunicaciones que, de manera simplista, podemos tomar como un canal binario ideal de régimen 40 kb/s. La cámara de a bordo posee una resolución de 1600×1200 píxeles en color, con cada color representado con 24 bits. Si las imágenes del planeta tienen una entropía que resulta ser una fracción f de la máxima posible, ¿cuántas imágenes por hora se podrán recibir, como máximo, en el centro de control?

3. ¿Tienen redundancia los mensajes de una fuente decimal de vector de probabilidades

$$\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/16, \ldots, 1/16)?$$

¿Puede cuantificarla? Razónelo.

4. Se quiere transmitir los símbolos de una fuente cuaternaria por un canal binario ideal. Para ello, se codifican primero con un codificador binario de eficiencia 0,9 y, a continuación, la salida de este se codifica con un código binario ideal de longitud L. ¿Cuánto vale L?

5. Dado un canal binario ideal de régimen de transmisión v_c bits/s y cuatro fuentes binarias independientes de entropías 1, 1/2, 1/4 y 1/8 bits, ¿cuál es el máximo régimen de transmisión de las fuentes, para transmisión fiable, si han de compartir el canal a partes iguales?

6. Dos fuentes discretas sin memoria, independientes e idénticas, con entropía igual a 5 bits y régimen de transmisión v_f transmiten sus símbolos por un canal cuaternario ideal que opera a v_c símbolos por segundo. El codificador de una de las fuentes es de eficiencia 0,8, mientras que el de la otra es ideal. Para transmisión fiable, si el canal se usa al 100 %, ¿qué fracción de tiempo de uso del canal le corresponde a cada fuente?

7. Considere una colección de fuentes discretas sin memoria e independientes $(H_2(X), r^{i-1})$, para $i = 1, 2, \ldots$, siendo $H_2(X)$ la entropía en bits, y r^{i-1}, con $r < 1$, la tasa de emisión de los símbolos.

a) ¿Cuántas de estas fuentes se pueden multiplexar si sus símbolos se transmiten por un canal cuaternario ideal cuya velocidad es de r símbolos por unidad de tiempo? Suponga que las fuentes se incorporan en orden $i = 1, 2, \ldots$ (Nota: $\sum_{i=0}^{n} r^i = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$).

b) ¿Qué condición deben cumplir $H_2(X)$ y r para que sea posible transmitir los símbolos de al menos una fuente?

c) ¿Bajo qué condición es posible multiplexar *infinitas* fuentes sobre este canal?

8. Se quieren transmitir de forma fiable los mensajes de un grupo de fuentes discretas sin memoria por un canal ideal ternario cuyo régimen de transmisión es de 1000 símbolos por segundo.

a) Si las fuentes son independientes, su entropía individual es 7/4 bits por símbolo y cada una emite 300 símbolos por segundo, ¿cuántas fuentes se pueden multiplexar sobre el canal si la codificación tiene una eficiencia del 90 %?

b) Si para 10 fuentes, cada una de régimen 300 símbolos por segundo, el porcentaje de tiempo que se utiliza el canal es, como mínimo, del 80 %, acote la entropía en bits de las fuentes, supuestas independientes.

9. (Codificación en cascada) El sistema de la figura 1 se compone de tres fuentes discretas sin memoria X_1, X_2 y X_3 y tres codificadores C_1, C_2 y C_3 conectados en cascada.

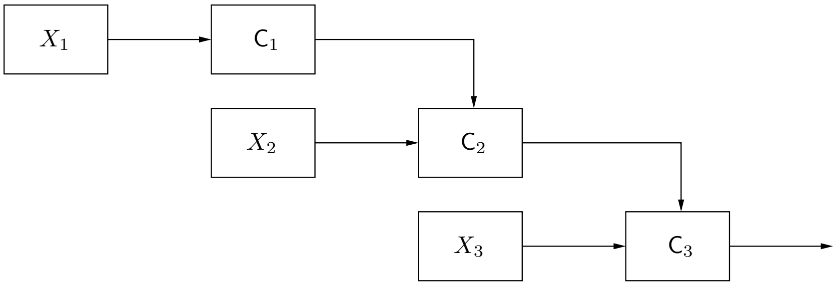

Figura 1: Codificación sucesiva de fuentes.

a) Si se quieren transmitir los mensajes de las tres fuentes de manera perfecta por un canal ideal, ¿qué condición tienen que cumplir las tasas de las fuentes?

b) Si se quiere que la comunicación sea eficiente, ¿es necesario que C_1, C_2 y C_3 sean codificadores ideales?

c) Supongamos que $H(X_1) = 10$ bits/símbolo, $H(X_2) = 10$ bits/símbolo y $H(X_3) = 5$ bits/símbolo, y que se quieren transmitir de manera fiable los mensajes de las tres fuentes por un canal M-ario de capacidad la mitad que uno ideal. Si todas las fuentes emiten a la misma velocidad ¿cuántos símbolos de canal son necesarios, como mínimo, por cada símbolo de fuente?

d) Si las fuentes y el canal tiene el mismo régimen, ¿cuánto debe valer M para que el porcentaje de tiempo que se usa el canal no exceda del 80 %?

10. (Huffman)

a) Construya un código compacto binario y uno ternario para la fuente cuyos símbolos tienen probabilidades

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{7}{36} & \frac{8}{36} \end{pmatrix}$$

si tales símbolos se codifican de uno en uno. Calcule la eficiencia de los códigos.

b) Calcule la eficiencia de un código compacto cuaternario para la fuente con vector de probabilidad proporcional a $(6, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$ si sus símbolos se codifican de uno en uno.

11. (Códigos compactos para fuentes uniformes)

a) Demuestre que las longitudes de las palabras de un código compacto binario para una fuente n-aria con símbolos equiprobables difieren a lo sumo en una unidad. ¿Cuántas palabras hay de cada longitud posible y cuál es la longitud del código?

b) Calcule la eficiencia de un código compacto binario para una fuente con 81 símbolos equiprobables.

12. Calcule la longitud de un código compacto en base 64 para una fuente binaria uniforme cuyos símbolos se codifican en bloques de longitud 30 bits.

13. Considere una fuente que genera 2^7 símbolos con probabilidades que, ordenadas en forma decreciente, verifican que las dos últimas son iguales y que cada una de las demás es el doble de la siguiente. Si se codifican los símbolos uno a uno, ¿cuál es la longitud de un código compacto binario? ¿Cuántos códigos (entendidos como un conjunto de palabras del código) compactos hay?

14.

a) Una fuente discreta genera de forma aleatoria secuencias de n bits en las que a lo sumo hay un cero. Calcule la eficiencia de un código binario compacto para esta fuente si cada secuencia se codifica individualmente.

b) † Otra fuente discreta genera aleatoriamente secuencias de longitud n bits que contienen uno o dos ceros, pero se sabe que la probabilidad de emisión de cada secuencia con dos ceros es la mitad que la de emitir una secuencia con un solo cero y que n es un múltiplo de 4. Calcule la eficiencia de un código compacto para esta fuente si las secuencias se codifican individualmente.

15. Un fuente binaria sin memoria genera ceros y unos con probabilidades $p(0) = 0{,}8$ y $p(1) = 0{,}2$. Suponga que se utiliza en la codificación un alfabeto de 5 símbolos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &1 \longrightarrow a \\ &01 \longrightarrow b \\ &001 \longrightarrow c \\ &0001 \longrightarrow d \\ &0000 \longrightarrow e \end{aligned}$$

¿Cuál es la eficiencia de este código? ¿Es posible la comunicación fiable (suponiendo canal ideal)? Razónelo.