El lenguaje While

Yolanda Ortega Mallén

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación

Universidad Complutense de Madrid

Sumario

- Sintaxis.
- Semántica de expresiones.
- Propiedades.

Bibliografía

- Hanne Riis Nielson & Flemming Nielson,
  Semantics with Applications. An Appetizer, Springer, 2007.

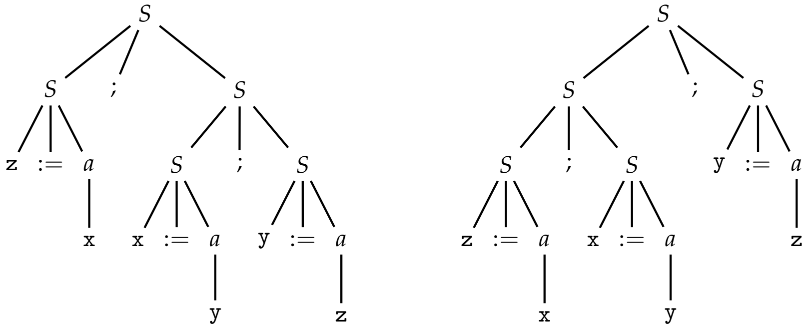
Sintaxis

- Categorías sintácticas:
  Numerales $n \in \mathbf{Num}$,
  Variables $x \in \mathbf{Var}$,
  Expresiones aritméticas $a \in \mathbf{Aexp}$,
  Expresiones booleanas $b \in \mathbf{Bexp}$,
  Sentencias $S \in \mathbf{Stm}$.
- Notación BNF (Backus-Naur form)

$$
\begin{array}{lcl}
a & ::= & n \mid x \mid a_1 + a_2 \mid a_1 \times a_2 \mid a_1 - a_2 \\
b & ::= & \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2 \\
S & ::= & x := a \mid \texttt{skip} \mid S_1 \ ; \ S_2 \mid \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2 \mid \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S
\end{array}
$$

Árboles de sintaxis abstracta

z := x ; x := y ; y := z



Semántica de numerales

$$n \quad ::= \quad 0 \mid 1 \mid n\ 0 \mid n\ 1$$

Función semántica $\mathcal{N} : \mathbf{Num} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}[\![0]\!] &= \mathbf{0} \\
\mathcal{N}[\![1]\!] &= \mathbf{1} \\
\mathcal{N}[\![n\ 0]\!] &= \mathbf{2} \otimes \mathcal{N}[\![n]\!] \\
\mathcal{N}[\![n\ 1]\!] &= \mathbf{2} \otimes \mathcal{N}[\![n]\!] \ \oplus \ 1
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.4

Siendo la sintaxis para n

$$n \quad ::= \quad 0 \mid 1 \mid 0\ n \mid 1\ n$$

¿Se puede definir $\mathcal{N}$ correctamente?

Técnicas generales

Definiciones composicionales

1. Cada categoría sintáctica se especifica mediante su sintaxis abstracta:
   elementos básicos + elementos compuestos.
   Descomposición única en los constituyentes inmediatos.
2. Funciones semánticas composicionales para cada categoría sintáctica:
   una cláusula semántica para cada elemento básico y para cada método de construcción de elementos compuestos.
   Las cláusulas para los elementos compuestos se definen en términos de la semántica de los elementos constituyentes.

Inducción estructural

1. Demostrar que la propiedad se verifica para los elementos básicos.
2. Asumiendo que la propiedad es cierta para todos los constituyentes inmediatos (hipótesis de inducción),
   demostrar que la propiedad se verifica para los elementos compuestos.

Semántica de expresiones aritméticas

- Estados **State** : **Var** $\longrightarrow \mathbb{Z}$
- Función semántica $\mathcal{A}$: **Aexp** $\longrightarrow$ (**State** $\longrightarrow \mathbb{Z}$)

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}[\![n]\!]s & = & \mathcal{N}[\![n]\!] \\
\mathcal{A}[\![x]\!]s & = & s\ x \\
\mathcal{A}[\![a_1 + a_2]\!]s & = & \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \oplus \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 \times a_2]\!]s & = & \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \otimes \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\
\mathcal{A}[\![a_1 - a_2]\!]s & = & \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \ominus \mathcal{A}[\![a_2]\!]s
\end{array}
$$

Semántica de expresiones aritméticas

Ejemplo 1: Sea $s\ \mathtt{x} = \mathbf{3}$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}[\![\mathtt{x}+1]\!]s & = & \mathcal{A}[\![\mathtt{x}]\!]s \oplus \mathcal{A}[\![1]\!]s \\
& = & (s\ \mathtt{x}) \oplus \mathcal{N}[\![1]\!] \\
& = & \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \\
& = & \mathbf{4}
\end{array}
$$

Ejemplo 2: Añadimos $-a$

$$\mathcal{A}[\![-a]\!]s = \mathbf{0} \ominus \mathcal{A}[\![a]\!]s$$

$$\mathcal{A}[\![-a]\!]s = \mathcal{A}[\![0-a]\!]s\ !$$

Ejercicio 1.8

Demostrar que las ecuaciones para $\mathcal{A}$ definen una función total.

Semántica de expresiones booleanas

- Función semántica $\mathcal{B} : \mathbf{Bexp} \longrightarrow (\mathbf{State} \longrightarrow \mathbf{T})$
  $\mathbf{T} = \{\mathbf{tt}, \mathbf{ff}\}$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{B}[\![\texttt{true}]\!]s & = & \mathbf{tt} \\
\mathcal{B}[\![\texttt{false}]\!]s & = & \mathbf{ff} \\
\mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!]s & = & \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \text{ y } \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \text{ son iguales} \\ \mathbf{ff} & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \text{ y } \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \text{ son distintos} \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![a_1 \leq a_2]\!]s & = & \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \text{ es menor o igual que } \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ \mathbf{ff} & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \text{ es mayor que } \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![\neg b]\!]s & = & \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff} \\ \mathbf{ff} & \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt} \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!]s & = & \begin{cases} \mathbf{tt} & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathbf{tt} \text{ y } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = \mathbf{tt} \\ \mathbf{ff} & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathbf{ff} \text{ o } \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = \mathbf{ff} \end{cases}
\end{array}
$$

Semántica de expresiones booleanas

Ejercicio 1.10

Demostrar que las ecuaciones para $\mathcal{B}$ definen una función total.

Ejercicio 1.11

Se extiende **Bexp** a **Bexp**$'$:

$$\begin{array}{rcl} b & ::= & \texttt{true} \mid \texttt{false} \\ & \mid & a_1 = a_2 \mid a_1 \neq a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid a_1 \geq a_2 \mid a_1 < a_2 \mid a_1 > a_2 \\ & \mid & \neg b \mid b_1 \wedge b_2 \mid b_1 \vee b_2 \mid b_1 \Rightarrow b_2 \mid b_1 \Leftrightarrow b_2 \end{array}$$

- Extender la función semántica $\mathcal{B}$.
- Las expresiones b_1 y b_2 son equivalentes si para todo estado s

$$\mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}[\![b_2]\!]s$$

Demostrar que para cada $b' \in \mathbf{Bexp}'$ existe $b \in \mathbf{Bexp}$ tal que b' y b son equivalentes.

Variables libres

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{FV}(n) & = & \emptyset \\
\mathrm{FV}(x) & = & \{x\} \\
\mathrm{FV}(a_1 + a_2) & = & \mathrm{FV}(a_1) \cup \mathrm{FV}(a_2) \\
\mathrm{FV}(a_1 \times a_2) & = & \mathrm{FV}(a_1) \cup \mathrm{FV}(a_2) \\
\mathrm{FV}(a_1 - a_2) & = & \mathrm{FV}(a_1) \cup \mathrm{FV}(a_2)
\end{array}
$$

Lema 1:
Sean $s, s' \in \textbf{State}$ tales que $\forall x \in \mathrm{FV}(a). s\ x = s'\ x$, entonces $\mathcal{A}[\![a]\!]s = \mathcal{A}[\![a]\!]s'$.

Ejercicio 1.13

Definir el conjunto de variables libres para una expresión booleana y demostrar un resultado similar al Lema 1.

Substituciones

$$
\begin{aligned}
n[y \mapsto a_0] &= n \\
x[y \mapsto a_0] &= \begin{cases} a_0 & \text{si } x = y \\ x & \text{si } x \neq y \end{cases} \\
(a_1 + a_2)[y \mapsto a_0] &= (a_1[y \mapsto a_0]) + (a_2[y \mapsto a_0]) \\
(a_1 \times a_2)[y \mapsto a_0] &= (a_1[y \mapsto a_0]) \times (a_2[y \mapsto a_0]) \\
(a_1 - a_2)[y \mapsto a_0] &= (a_1[y \mapsto a_0]) - (a_2[y \mapsto a_0])
\end{aligned}
$$

Actualización de estados:

$$
(s[y \mapsto v])x = \begin{cases} v & \text{si } x = y \\ s\ x & \text{si } x \neq y \end{cases}
$$

Ejercicio 1.14

Demostrar que $\mathcal{A}[\![a[y \mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a]\!](s[y \mapsto \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$ para cualquier estado s.

Ejercicio 1.15

Definir la substitución para expresiones booleanas $b[y \mapsto a_0]$ y demostrar un resultado similar al del ejercicio anterior.