# Semántica Operacional

Yolanda Ortega Mallén

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación

Universidad Complutense de Madrid

## Sumario

- Semántica de paso largo.
- Semántica de paso corto.
- Equivalencia.

# Sistema de transiciones

- Configuraciones:

  $\langle S, s\rangle$ la sentencia $S$ se ejecutará desde el estado $s$

  $s$ estado terminal

- Transiciones: $\langle S, s\rangle \to s'$

$$[\text{ass}_{\text{bs}}] \quad \langle x := a, s\rangle \to s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

$$[\text{skip}_{\text{bs}}] \quad \langle \texttt{skip}, s\rangle \to s$$

$$[\text{comp}_{\text{bs}}] \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s',\ \langle S_2, s'\rangle \to s''}{\langle S_1 \ ; \ S_2, s\rangle \to s''}$$

$$[\text{if}^{\text{tt}}_{\text{bs}}] \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2, s\rangle \to s'} \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \textbf{tt}$$

$$[\text{if}^{\text{ff}}_{\text{bs}}] \quad \frac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle \texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2, s\rangle \to s'} \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \textbf{ff}$$

$$[\text{while}^{\text{tt}}_{\text{bs}}] \quad \frac{\langle S, s\rangle \to s', \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s''} \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \textbf{tt}$$

$$[\text{while}^{\text{ff}}_{\text{bs}}] \quad \langle \texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S, s\rangle \to s \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \textbf{ff}$$

# Sistema de transiciones

La ejecución de una sentencia $S$ en un estado $s$

- termina si y solo si existe un estado $s'$ tal que $\langle S, s\rangle \to s'$,
- cicla si y solo si no existe ningún estado $s'$ tal que $\langle S, s\rangle \to s'$.

## Ejercicio 2.4

Determinar si las sentencias terminan \ ciclan (o no) siempre:

- $\texttt{while}\ \neg(\texttt{x} = 1)\ \texttt{do}\ (\texttt{y} := \texttt{y} \times \texttt{x}\ ;\ \texttt{x} := \texttt{x} - 1)$
- $\texttt{while}\ 1 \leq \texttt{x}\ \texttt{do}\ (\texttt{y} := \texttt{y} \times \texttt{x}\ ;\ \texttt{x} := \texttt{x} - 1)$
- `while true do skip`

# Propiedades

Equivalencia semántica $\forall s \in \textbf{State}. \langle S_1, s\rangle \to s' \iff \langle S_2, s\rangle \to s'$

Lema 2:
`while` $b$ `do` $S$ es semánticamente equivalente a
`if` $b$ `then` $(S\,;$ `while` $b$ `do` $S)$ `else skip`.

## Ejercicio 2.6

- Demostrar que $S_1\,;(S_2\,;S_3)$ y $(S_1\,;S_2)\,;S_3$ son semánticamente equivalentes.
- Demostrar que $S_1\,;S_2$ en general no es semánticamente equivalente a $S_2\,;S_1$.

## Ejercicio 2.7

Extender el lenguaje **While** con la sentencia `repeat` $S$ `until` $b$.

- Extender la relación $\to$ (reglas semánticas).
- Demostrar que `repeat` $S$ `until` $b$ es semánticamente equivalente a $S\,;$ `if` $b$ `then skip else` (`repeat` $S$ `until` $b$).

## Propiedades

### Inducción sobre el árbol de derivación (inducción por reglas)

1. Demostrar que la propiedad se verifica para los axiomas.
2. Para cada regla, asumiendo que la propiedad es cierta para todas las premisas (hipótesis de inducción),
   demostrar que la propiedad se verifica para la conclusión,
   siempre y cuando se satisfagan las condiciones de la regla.

Teorema 3:
La semántica de paso largo es determinista:

$$\langle S, s\rangle \to s' \wedge \langle S, s\rangle \to s'' \Longrightarrow s' = s''.$$

### Ejercicio 2.10

Demostrar que $\texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b$ es semánticamente equivalente a $S\,;\,\texttt{while}\ \neg b\ \texttt{do}\ S$.

# Función semántica

Significado de una sentencia:

$$\mathcal{S}_{\text{bs}} : \mathbf{Stm} \longrightarrow (\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State})$$

$$\mathcal{S}_{\text{bs}}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{si } \langle S, s\rangle \to s' \\ \text{INDEFINIDO} & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

## Ejercicio 2.11

- Definir una semántica operacional de paso largo para las expresiones aritméticas, con una relación de transición: $\langle a, s\rangle \to_{\text{Aexp}} z$.
- Demostrar que el significado de $a$ según esta relación coincide con el definido por $\mathcal{A}$.

## Ejercicio 2.12

- Definir una semántica operacional de paso largo para las expresiones booleanas, con una relación de transición: $\langle b, s\rangle \to_{\text{Bexp}} t$.
- Demostrar que el significado de $b$ según esta relación coincide con el definido por $\mathcal{B}$.

## Sistema de transiciones

Pasos de ejecución individuales.

- Transiciones: $\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma$
  Primer paso de la ejecución de $S$ desde el estado $s$:
  - configuración intermedia $\langle S', s'\rangle$, ejecución de $S$ no completada;
  - estado final $s'$, ejecución de $S$ terminada.
- $\langle S, s\rangle$ está bloqueada si no existe $\gamma$ tal que $\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma$.

$$[\text{ass}_{\text{ss}}] \qquad \langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

$$[\text{skip}_{\text{ss}}] \qquad \langle \mathtt{skip}, s\rangle \Rightarrow s$$

$$[\text{comp}^1_{\text{ss}}] \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1 \,;\, S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1' \,;\, S_2, s'\rangle}$$

$$[\text{comp}^2_{\text{ss}}] \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1 \,;\, S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

$$[\text{if}^{\text{tt}}_{\text{ss}}] \qquad \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\text{if}^{\text{ff}}_{\text{ss}}] \qquad \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

$$[\text{while}_{\text{ss}}] \qquad \langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S, s\rangle \Rightarrow \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (S\,;\mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S)\ \mathtt{else}\ \mathtt{skip}, s\rangle$$

# Secuencias de derivación

Secuencia finita $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_k$,

con $\gamma_0 = \langle S, s\rangle$ y $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ para $0 \leq i < k$,
donde $k \geq 0$ y $\gamma_k$ es o un estado final o una configuración bloqueada.

Secuencia infinita $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots$,

con $\gamma_0 = \langle S, s\rangle$ y $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ para $0 \leq i$.

La ejecución de una sentencia $S$ en un estado $s$

- termina si y solo si existe una secuencia de derivación finita comenzando en $\langle S, s\rangle$,
- termina con éxito si $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$ para algún estado $s'$,
- cicla si y solo si existe una secuencia de derivación infinita comenzando en $\langle S, s\rangle$.

**Ejercicio 2.17**

Extender el lenguaje **While** con la sentencia `repeat` $S$ `until` $b$ y extender la relación $\Rightarrow$.

# Propiedades

### Inducción sobre la longitud de la secuencia de derivación

1. Demostrar que la propiedad se verifica para todas las secuencias de longitud 0.
2. Asumiendo que la propiedad es cierta para todas las secuencias de derivación con longitud máxima $k$ (hipótesis de inducción), demostrar que la propiedad se verifica para secuencias de derivación con longitud $k+1$.

**Lema 4:**
$\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow^k s'' \Longrightarrow \exists s' \in \mathbf{State}\, \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}. \langle S_1, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s' \wedge \langle S_2, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$, con $k = k_1 + k_2$.

### Ejercicio 2.20 + 2.21

- Demostrar que la ejecución de una sentencia es independiente de las sentencias posteriores: si $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^k s'$ entonces $\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2, s'\rangle$.
- Sin embargo, si $\langle S_1 ; S_2, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2, s'\rangle$ no necesariamente $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* s'$.

# Propiedades

## Ejercicio 2.22

Demostrar que la semántica de paso corto es determinista:
$\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma \wedge \langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma' \Longrightarrow \gamma = \gamma'$

Existe exactamente una secuencia de derivación comenzando en $\langle S, s\rangle$.

Equivalencia semántica para todo estado $s \in \mathbf{State}$

- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* \gamma \Longleftrightarrow \langle S_2, s\rangle \Rightarrow^* \gamma$, cuando $\gamma$ es terminal o bloqueada;
- la secuencia de derivación comenzando en $\langle S_1, s\rangle$ es infinita sii lo es comenzando en $\langle S_2, s\rangle$.

## Ejercicio 2.23

Demostrar que las siguientes sentencias son semánticamente equivalentes:

- $S$ ; `skip` y $S$
- `while` $b$ `do` $S$ y `if` $b$ `then` $(S$ ; `while` $b$ `do` $S)$ `else skip`
- $S_1 ; (S_2 ; S_3)$ y $(S_1 ; S_2); S_3$

## Ejercicio 2.24

Demostrar que `repeat` $S$ `until` $b$ es semánticamente equivalente a
$S$ ; `while` $\neg b$ `do` $S$.

# Función semántica

Significado de una sentencia:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ss}} : \mathbf{Stm} \longrightarrow (\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State})$$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{si } \langle S, s\rangle \Rightarrow^* s' \\ \text{INDEFINIDO} & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

## Ejercicio 2.25

Determinar si la equivalencia semántica de $S_1$ y $S_2$ es lo mismo que $\mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S_1]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S_2]\!]$.

# Equivalencia de las semánticas de paso largo y paso corto

**Teorema 5:**

$\forall S \in \mathbf{Stm}.\mathcal{S}_{\mathrm{bs}}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S]\!]$

1. Si la ejecución de $S$ desde un estado termina en una de las semánticas, entonces también termina en la otra, y los estados finales son el mismo.
2. Si la ejecución de $S$ desde un estado cicla en una de las semánticas, entonces también cicla en la otra.

Lema 6: $\forall S \in \mathbf{Stm}\, \forall s, s' \in \mathbf{State}.\langle S, s\rangle \to s' \Longrightarrow \langle S, s\rangle \Rightarrow^{*} s'$

Lema 7: $\forall S \in \mathbf{Stm}\, \forall s, s' \in \mathbf{State}\, \forall k \in \mathbb{N}.\langle S, s\rangle \Rightarrow^{k} s' \Longrightarrow \langle S, s\rangle \to s'$

# Equivalencia de las semánticas de paso largo y paso corto

## Resumen demostración equivalencia

1. Inducción sobre el árbol de derivación
   Para cada árbol de derivación en la semántica de paso largo existe la correspondiente secuencia de derivación finita en la semántica de paso corto.
2. Inducción sobre la longitud de la secuencia de derivación
   Para cada secuencia de derivación finita en la semántica de paso corto existe el correspondiente árbol de derivación en la semántica de paso largo.

## Ejercicio 2.29

Extender la demostración del Teorema 5 para incluir la sentencia
`repeat` $S$ `until` $b$.