1. Demuestra que la función diagonal $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto f(x) = (x, x)$ es continua.

2. Sea $X = [0, 1]$ con la topología usual e $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico. Estudia si las siguientes funciones son continuas.

(1) $f\colon X \to Y\colon t \mapsto f(t) = (t, t)$;
(2) $g\colon X \to Y\colon t \mapsto g(t) = (1/2, (2t + 1)/4)$, y
(3) $h\colon X \to Y\colon t \mapsto h(t) = (t, 1)$.

3. Prueba que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{N}$ con la topología discreta que son sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ en $\mathbb{R}$ con la topología discreta que tengan tales propiedades. (*Indicación: la imagen inversa de $\mathbb{R}$ sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a, b)$ contiene siempre un número racional.*)

4. Estudia si $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{[\,)}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{(\,]}$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

5. Demuestra que los espacios $X = [0, 2) \cup [4, 5]$ e $Y = [0, 3]$ son homeomorfos con la topología del orden.

6. Halla una función continua y biyectiva del intervalo $(-1, 1)$ en el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (x - 1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (x + 1)^2 + y^2 = 1\},$$

ambos con la topología usual. (*Más adelante sabremos demostrar que estos espacios no son homeomorfos.*)

7. Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \ = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Demuestra que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

8. Demuestra que $[0, \infty) \times [0, \infty)$, con la topología usual es homeomorfo a

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 < 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

9. Da un ejemplo de una función continua $f : X \to Y$ cuyo grafo $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ no sea cerrado en $X \times Y$ y de una función no continua cuyo grafo sí lo sea. (*Indicación: Piensa en la identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ poniendo topologías adecuadas en el espacio de salida y en el de llegada.*)

10. En el espacio producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[\,)})$ describe la topología inducida en los subconjuntos

$$X = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \quad e \quad Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

11. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $A \subset X \times Y$. Sean

$$A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\} \quad y \quad A_y = \{x \in X : (x, y) \in A\}.$$

(i) Demuestra que si A es abierto en $X \times Y$ entonces para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, A_x y A_y son abiertos en Y y en X respectivamente.

(ii) Si A_x y A_y son abiertos para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, ¿es A abierto en $X \times Y$?

12. Se considera la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ en $\mathbb{R}^2$ generada por la base $\mathcal{B}$ del ejercicio 9 de la hoja 1 (Para cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $B((x, y), r)$: el cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x, y). $\mathcal{B} = \{B((x, y), r)\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$.) ¿Existen en $\mathbb{R}$ sendas topologías de modo que su producto coincida con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$? (*Indicación: Prueba que ambas topologías deben ser menos finas que la usual.*)

13. Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $X \times Y$ construida a partir de las topologías $\mathcal{T}_1$ de X y $\mathcal{T}_2$ de Y. Prueba que si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ (no necesariamente la "base producto") entonces $p_1(\mathcal{B}) = \{p_1(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_1$ y $p_2(\mathcal{B}) = \{p_2(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}_2$. ¿Se puede usar este hecho para resolver el ejercicio anterior?

14. Demuestra que todo espacio métrico es un espacio topológico Hausdorff.

15. Demuestra que (X, T_X) es un espacio topológico con la propiedad de separación de Hausdorff si y sólo si

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

es un cerrado en el espacio producto $X \times X$, cuya topología viene generada por la base $\mathcal{B} := \{\mathcal{U} \times \mathcal{V} : \mathcal{U}, \mathcal{V} \in T_X\}$. De modo más general, se puede probar lo siguiente: si $f : X \longrightarrow Y$ es continua e Y es un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$.

16. Siguiendo con el ejercicio anterior, demostrar que el recíproco de la última afirmación no es cierto en general. Sin embargo, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta y sobre, y el conjunto $K = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$ entonces Y es Hausdorf.

17. Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y siendo Y un espacio de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

18. Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y, siendo Y un espacio de Hausdorff, que coinciden en un subconjunto denso de X, entonces $f = g$.

19. Estudia la convergencia de la sucesión $(-n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\leftarrow}$ (la que tiene como base $\mathcal{B} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$) y concluye que el límite de una sucesión no tiene por qué ser único cuando el espacio no es Hausdorff. Por otro lado, aunque $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\leftarrow})$ no es Hausdorff, sí que posee cierta propiedad de separación que el lector puede tratar de descubrir y enunciar.

20. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff. Demuestra que:
(i) Si X es finito, $\mathcal{T}$ es la topología discreta.
(ii) Si A es un subconjunto finito de X, A no tiene puntos de acumulación, es decir $A' = \emptyset$.

21. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección en el primer factor.
(i) Sea X el subespacio $(0 \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea g la restricción de p_1 a X. Demuestra que g es una aplicación cerrada pero que no es una aplicación abierta.
(ii) Sea Y el subespacio $(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times 0)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea h la restricción de p_1 a Y. Demuestra que la aplicación h no es ni abierta ni cerrada, pero sí es una aplicación cociente.
(*Indicación:* $h^{-1}(U) \cap (\mathbb{R} \times 0) = U \times 0$.)

22. Sea $p : X \to Y$ una aplicación y sea A un subespacio de X.
(i) Demuestra que si A es abierto en X y p es una aplicación abierta, entonces la restricción de p a A es una aplicación abierta
(ii) Concluye del apartado anterior que $p' : A \to p(A) \colon x \mapsto p'(x) := p(x)$ es una aplicación abierta.
(iii) Demuestra que si A y p son cerradas, la restricción de p a A es cerrada, luego la aplicación p' (del aparatado (ii)) lo es.

23. Se considera el plano $X = \mathbb{R}^2$.
(i) Definimos una relación de equivalencia sobre X:

$$(x_0, y_0) \equiv (x_1, y_1) \quad \text{si} \quad x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2.$$

Identifica el espacio topológico cociente X^* con alguno conocido.
(ii) Repite el apartado anterior para la siguiente relación de equivalencia

$$(x_0, y_0) \equiv (x_1, y_1) \quad \text{si} \quad x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

24. Sea Z el subespacio $(\mathbb{R} \times 0) \cup (0 \times \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to Z$ la aplicación dada por $g(x, y) = (x, 0)$ si $x \neq 0$, y $g(0, y) = (0, y)$.
(i) Estudia si g es una aplicación continua, si es abierta y si es cerrada.
(ii) Demuestra que en la topología cociente inducida por g el espacio Z no es Hausdorff.