

Métodos Matemáticos Aplicados a la Ingeniería.

Tema 1: Métodos numéricos para ecuaciones no lineales

Darío Ramos López

Universidad Rey Juan Carlos

dario.ramos.lopez@urjc.es

septiembre de 2020

1 Introducción al problema

2 Fundamentos teóricos

3 Métodos numéricos para ecuaciones no lineales

- Método de bisección
- Método de punto fijo
- Métodos geométricos
- Método de Newton

Introducción al problema

Problema que queremos resolver: encontrar la soluciones o raíces de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, siendo la función f es conocida.

Ejemplos:

- Si $f(x)$ es un polinomio u otra función, encontrar sus raíces:

$$f(x) = e^x - 2x = 0.$$

- Cálculo de autovalores de una matriz, son las raíces de su polinomio característico, $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0.$$

- Obtención de extremos (máximos/mínimos relativos) de una función, ceros de su derivada, $f'(x) = 0$:

$$f(x) = \cos(5x) - \exp(x) \longrightarrow f'(x) = -5 \sin(x) - \exp(x) = 0.$$

Introducción al problema

Una ecuación con las mismas soluciones puede venir escrita de formas distintas, siendo equivalentes (tienen el mismo conjunto de soluciones).

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son todas equivalentes:

$$x^2 - x + 5 = 0$$

$$x^2 = x - 5$$

$$x = \sqrt{x - 5}$$



Una ecuación de la forma:

$$f(x) = 0$$

(cuando “ f ” está igualada a cero) diremos que es una **ecuación en forma normal o estándar**. Generalmente trabajaremos con ecuaciones en forma estándar, con casi todos los métodos.

Si una ecuación está escrita de esta forma:

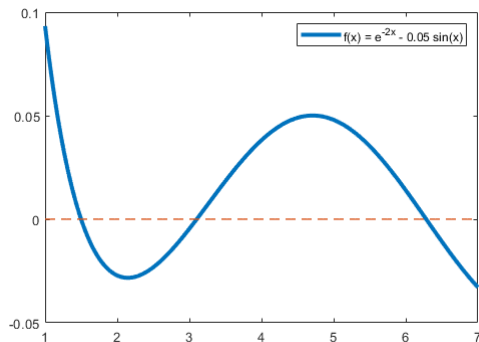
$$g(x) = x$$

(“ g ” igualada a x , no a cero) diremos que se trata de una **ecuación de punto fijo**. Se utiliza para el método de punto fijo.

Introducción al problema

La representación gráfica de la función que define la ecuación es muy útil para localizar raíces o aproximarlas visualmente.

Por ejemplo, si queremos encontrar una solución de $e^{-2x} = 0.05 \sin(x)$ en el intervalo $[1, 7]$, podemos dibujar $f(x) = e^{-2x} - 0.05 \sin(x)$:



1 Introducción al problema

2 Fundamentos teóricos

3 Métodos numéricos para ecuaciones no lineales

- Método de bisección
- Método de punto fijo
- Métodos geométricos
- Método de Newton

¿Cómo sabemos si la ecuación $f(x) = 0$ **tiene o no** solución?

Una herramienta básica (que ya conocéis) para determinar la existencia de la solución de una ecuación es el:

Teorema (de Bolzano)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y f toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo (es decir, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, o viceversa), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ donde f se anula: $f(c) = 0$.

Ejemplo

La función $f(x) = x^3 - 3$ en los extremos del intervalo $[1, 2]$ toma los valores:

$$f(1) = -2 < 0, f(2) = 5 > 0.$$

Como f es continua, el Teorema de Bolzano nos garantiza que hay un punto c dentro del intervalo, $1 < c < 2$, de forma que $f(c) = 0$.

Es decir, que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en $(1, 2)$.

¿Cómo sabemos si la ecuación $f(x) = 0$ tiene **exactamente una solución** en un intervalo?

Si es aplicable, el Teorema de Bolzano nos indica que hay al menos una solución en el intervalo, pero podría haber más de una.

Para estar seguros de que sólo hay una solución, podemos, **además de** utilizar el Teorema de Bolzano, estudiar si la función es inyectiva, estrictamente creciente o estrictamente decreciente en el intervalo. En cualquiera de estos casos, podemos afirmar que la solución es única.

Ejemplo

Seguimos el ejemplo anterior. La función $f(x) = x^3 - 3$ ya hemos visto que tiene al menos una solución en $(1, 2)$.

Además, f es estrictamente creciente en $(1, 2)$ ya que su derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$ es positiva en todo $(1, 2)$.

Por tanto, la ecuación $f(x) = 0$, o equivalentemente $x^3 - 3 = 0$, tiene exactamente una solución en $(1, 2)$.

Fundamentos teóricos: ecuaciones de punto fijo

¿Cómo sabemos si la ecuación de punto fijo $g(x) = x$ tiene o no solución, y, en su caso, si la solución es única?

Cuando en lugar de una ecuación estándar, $f(x) = 0$, tenemos una ecuación de punto fijo, $g(x) = x$, hay otro teorema que establece si existe solución y si es única:

Teorema (del punto fijo (de Banach))

Si una función $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ (es decir, que $a \leq g(x) \leq b$, $\forall x \in [a, b]$) es continua, entonces $g(x)$ tiene al menos un punto fijo r en $[a, b]$ (se llama punto fijo al valor r que cumple $g(r) = r$, es decir, queda fijo al aplicar g).

Si además g es derivable y existe una constante $0 < q < 1$ tal que: $|g'(x)| \leq q < 1$, $\forall x \in [a, b]$ (en este caso se dice que g es una función contractiva), entonces el punto fijo r es único: $\exists! r \in [a, b] : g(r) = r$.

Ejemplo

Consideremos la ecuación $10x = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$. Podemos escribirla como una ecuación de punto fijo equivalente así: $x = \frac{1}{10}e^x$, definiendo $g(x) = \frac{1}{10}e^x$.

La función g está definida en $[0, 1]$ y toma valores en $[0, 1]$, ya que g es creciente (¡es la exponencial!), y cumple $g(0) = \frac{1}{10} > 0$ y $g(1) = \frac{e}{10} \approx 0.271$, por lo que $g(x) \in [0, 1]$, $\forall x \in [0, 1]$. Así pues, según el Teorema de punto fijo, existe un $r \in [0, 1]$ tal que $r = g(r) = \frac{1}{10}e^r$.

Además, g es derivable y $g'(x) = \frac{1}{10}e^x = g(x)$. Como hemos visto, $0 < g(x) < 0.28 = q < 1$, $\forall x \in [0, 1]$, luego $|g'(x)| \leq 0.28 < 1$. Por tanto, g es contractiva y según el teorema, hay un único $r \in [0, 1]$ tal que $r = g(r)$.

Es decir, existe una sola solución de la ecuación $x = \frac{1}{10}e^x$ en $[0, 1]$.

1 Introducción al problema

2 Fundamentos teóricos

3 Métodos numéricos para ecuaciones no lineales

- Método de bisección
- Método de punto fijo
- Métodos geométricos
- Método de Newton

Método de bisección

Ya podemos plantear un primer método numérico para resolver ecuaciones no lineales, llamado el método de bisección.

Consiste en aplicar repetidamente el Teorema de Bolzano, con intervalos cada vez más pequeños de forma que la solución esté siempre contenida en ellos.

En cada paso, tomamos como aproximación al valor de la raíz el punto medio del intervalo.

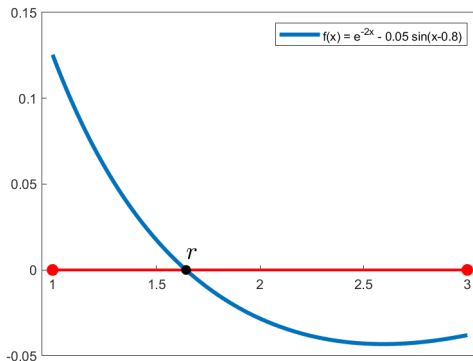
Método de bisección

Partimos de una función continua $f(x)$ que define la ecuación $f(x) = 0$, y un intervalo en el cual sea aplicable el Teorema de Bolzano, es decir, donde la función f cambie de signo en los extremos.

Por ejemplo, $f(x) = e^{-2x} - 0.05 \sin(x - 0.8)$ en el intervalo $[1, 3]$ es continua y cumple $f(1) \approx 0.13 > 0$, y $f(3) \approx -0.04 < 0$.

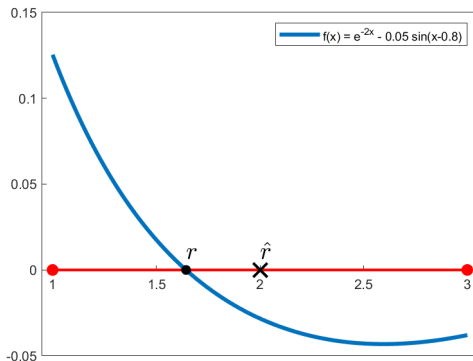
Método de bisección

Dibujamos la función y marcamos el intervalo inicial:



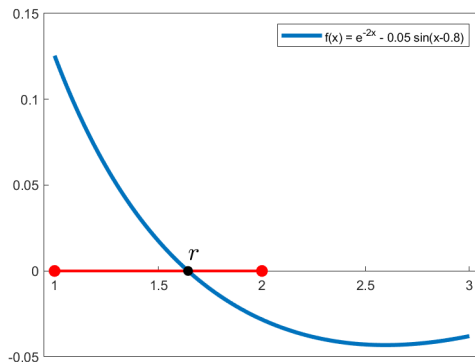
Método de bisección

Tomamos como aproximación el punto medio del intervalo: $\hat{r} = 2 \approx r$.



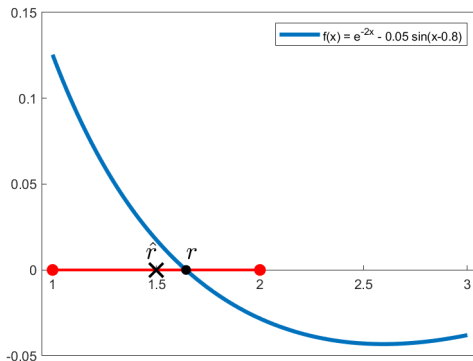
Método de bisección

Pero podemos repetir esto con el intervalo más pequeño $[1, 2]$:



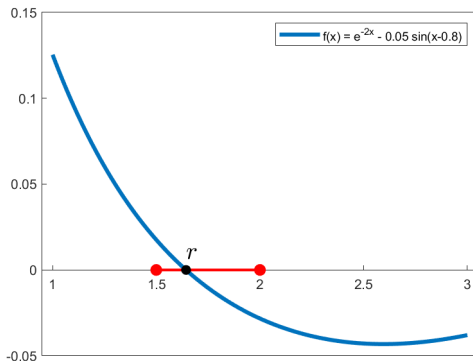
Método de bisección

Y obtenemos una aproximación mejor: $\hat{r} = 1.5 \approx r$.



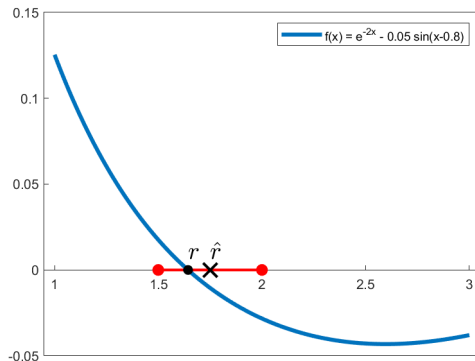
Método de bisección

Este proceso se puede repetir indefinidamente:



Método de bisección

Obteniendo cada vez aproximaciones más precisas para r :



Método de bisección

Podemos describir el método, de forma algorítmica, de esta manera:

- 1 Partimos de la ecuación $f(x) = 0$ con f continua y que cambia de signo en los extremos de un intervalo $[a, b]$ (si no conocemos el intervalo, hay que buscarlo).
- 2 Definimos el primer intervalo $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ conteniendo a r :
 $a^{(1)} = a$, $b^{(1)} = b$, y definimos $n = 1$ (contador de iteraciones).
- 3 Mientras no se alcance el criterio de parada (predefinido):
 - 1 Calculamos una nueva aproximación $x^{(n)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}$ e incrementamos n .
 - 2 Actualizamos el intervalo $[a^{(n)}, b^{(n)}]$ de forma que siempre haya un cambio de signo en los extremos:
Si $f(a^{(n)})f(x^{(n)}) < 0$, definimos $a^{(n+1)} = a^{(n)}$ y $b^{(n+1)} = x^{(n)}$.
En caso contrario, si $f(x^{(n)})f(b^{(n)}) < 0$, definimos $a^{(n+1)} = x^{(n)}$ y $b^{(n+1)} = b^{(n)}$.
- 4 Finalmente, la aproximación final obtenida es $\hat{r} = x^{(n)} \approx r$.

Al plantear este método surgen varias cuestiones, importantes también para otros métodos que estudiaremos después:

- Es un proceso **iterativo** (del verbo *iterar*, repetir). Cada etapa (repetición) se llama una iteración.
- No calculamos una única solución aproximada, si no **una sucesión** de valores aproximados $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ que suponemos que se van acercando a r : $x^{(n)} \rightarrow r$. ¿Seguro?
- Es un proceso **infinito** en general. ¿Cuándo paramos?
- Ya que **no conocemos** r , la verdadera solución, ¿cómo estimamos el error que se comete?

Medición del error

Al calcular de forma aproximada una cantidad r (valor verdadero/real, normalmente desconocido), obtendremos un valor cercano \tilde{r} , y podemos medir el error cometido de varias formas:

- Error absoluto de la aproximación:

$$E_{abs}(\tilde{r}) = |r - \tilde{r}|$$

- Error relativo de la aproximación:

$$E_{rel}(\tilde{r}) = \frac{|r - \tilde{r}|}{|r|}$$

Orden de magnitud: diremos que r es de orden 10^m cuando $r \approx 10^m$ (puede ser mayor o menor, pero de un tamaño similar a 10^m).

Al resolver una ecuación con un método numérico, normalmente no conocemos la solución exacta r , y por tanto no podemos calcular el error (ni absoluto ni relativo).

Sin embargo, podemos estimar el error máximo posible utilizando el método de bisección, ya que en cada iteración n sabemos que la raíz exacta r , cuyo valor estamos aproximando por $x^{(n)}$ (punto medio del intervalo), está dentro del intervalo $[a^{(n)}, b^{(n)}]$, y por tanto:

$$E_{abs} \left(x^{(n)} \right) < \frac{1}{2} \left| b^{(n)} - a^{(n)} \right|$$

Estimación del error

En otros métodos no será tan sencillo, o incluso no será posible, tener o utilizar cotas del error, y tendremos que estimarlo. Es decir, aproximar el error absoluto, que no podemos calcular, por otra cantidad que sí.

Podemos asumir que si estamos cerca de la raíz, es decir, si $E_{abs}(x^{(n)}) = |r - x^{(n)}|$ es pequeño, podemos estimarlo a partir de la diferencia entre dos iteraciones consecutivas:

$$E_{abs}(x^{(n)}) = |r - x^{(n)}| \approx |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

Esta es una suposición que en algunos casos puede no ser realista, pero generalmente funciona bien.

Criterios de parada

Dado una sucesión de aproximaciones a la solución r , generada por un método numérico,

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)} \longrightarrow r,$$

¿cuándo paramos de calcular nuevos términos? Es decir, ¿para qué n tomaremos $x^{(n)}$ como la aproximación final de la solución r ?

Surgen varias posibles ideas, fijando una tolerancia pequeña ε ($\approx 10^{-6}$) y un número máximo de iteraciones N_{max} (se pueden combinar):

- Error absoluto o relativo pequeño: $E_{abs}(x^{(n)}) < \varepsilon$ o $E_{rel}(x^{(n)}) < \varepsilon$. No sirven (desconocemos r).
- Cota del error pequeña: $E_{abs}(x^{(n)}) < \frac{1}{2} |b^{(n)} - a^{(n)}|$ (sólo sirve para el método de bisección).
- Error estimado pequeño: $|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \varepsilon$ o bien $\frac{|x^{(n)} - x^{(n-1)}|}{x^{(n)}} < \varepsilon$.
- Valor de f pequeño: $f(x^{(n)}) < \varepsilon$ (si $x^{(n)} \approx r$, $f(x^{(n)}) \approx 0$).
- Finalizar al llegar a N_{max} iteraciones.

Convergencia y velocidad

Dada la sucesión de aproximaciones $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, diremos que converge a la solución exacta r (escrito $x^{(n)} \rightarrow r$) si se cumple:

$$E_{abs}(x^{(n)}) = |r - x^{(n)}| \rightarrow 0.$$

Que una sucesión sea convergente no implica que el error disminuya en cada iteración. Para estudiar cuándo sí se puede garantizar esto, introducimos un nuevo concepto.

Diremos que la sucesión converge *con velocidad geométrica* si:

$$\exists q \in (0, 1), \exists C > 0 : E_{abs}(x^{(n)}) = |r - x^{(n)}| \leq Cq^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Convergencia y velocidad

Hay distintos órdenes o velocidades de convergencia, incluso dentro de la geométrica. Para distinguirlas, introducimos la siguiente definición:

Supongamos que $x^{(n)} \rightarrow r$ con velocidad geométrica. Diremos que la convergencia es de orden p si:

$$\exists q > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \frac{|x^{(n+1)} - r|}{|x^{(n)} - r|^p} \leq q \quad \Leftrightarrow \quad E_{abs}(x^{(n+1)}) \leq q E_{abs}(x^{(n)})^p$$

Si $p = 1$ se dice que hay convergencia lineal (y tiene que ser $q < 1$).

Si $p = 2$, hay convergencia cuadrática.

Un método numérico iterativo es de orden p si genera una sucesión $x^{(n)}$ que converge a r con velocidad geométrica de orden p .

Método de bisección: resumen

Principales ventajas del método de bisección:

- Es sencillo de recordar y aplicar (Teorema de Bolzano reiteradamente).
- Es un método global (la sucesión de aproximaciones converge a la solución real por muy grande que sea el intervalo inicial o muy lejos que esté la aproximación inicial).

Principal desventaja:

- Es un método muy lento, en comparación con otros (necesitamos muchas iteraciones para estar aproximar la raíz con suficiente precisión).

Método de punto fijo

Idea: transformar el problema de encontrar una raíz de $f(x) = 0$ en otro equivalente, encontrar un punto fijo para la ecuación $x = g(x)$ (de forma que $f(r) = 0 \Leftrightarrow r = g(r)$).

La elección de $g(x)$ no es única, hay múltiples opciones

Una vez escogido $x^{(1)}$ y $g(x)$, se calcula cada nueva aproximación como:

$$x^{(n+1)} = g\left(x^{(n)}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Método de punto fijo

Teorema (del punto fijo (de Banach))

Sea $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua, y existe $g'(x)$ en (a, b) .
Entonces $g(x)$ tiene al menos un punto fijo r en $[a, b]$ ($g(r) = r$).

Si además existe una constante $0 < q < 1$ tal que: $|g'(x)| \leq q < 1$,
 $\forall x \in [a, b]$ (g es contractiva), entonces el punto fijo r es único.

En las condiciones del teorema, la sucesión de punto fijo $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ converge a r para cualquier valor inicial del intervalo ($\forall x^{(1)} \in [a, b]$), y además la convergencia es con velocidad geométrica de orden 1 para n suficientemente grande:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{(n+1)} - r}{x^{(n)} - r} = g'(r) \leq q < 1$$

Además, la convergencia puede ser de orden p mayor que uno, sucede cuando: $g'(r) = 0, g''(r) = 0, \dots, g^{(p)}(r) = 0$ y $g^{(p+1)}(r) \neq 0$

Método de punto fijo: criterio de parada

Para decidir cuándo parar, podemos establecer a priori una tolerancia ε pequeña (típicamente de orden 10^{-3} , 10^{-6} , ...) y parar cuando se cumpla:

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon$$

Con los resultados teóricos que conocemos, se puede deducir que el error absoluto es menor que tolerancia, $E_{abs}(x^{(n)}) \leq \varepsilon$, siempre que:

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| \leq \frac{1 - q}{q} \varepsilon$$

Método de punto fijo: ejemplo

Ejemplo

Previamente demostramos que la ecuación $10x = e^x$ tiene una única solución en el intervalo $[0, 1]$. Podemos calcularla de forma aproximada usando el método de punto fijo: $10x = e^x \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}e^x = g(x)$.

Como valor inicial o semilla tomamos el punto medio del intervalo:

$x^{(0)} = 0.5$ y aplicamos el método, estimando el error en cada iteración:

$$x^{(1)} = g(x^{(0)}) = g(0.5) = \frac{1}{10}e^{0.5} = 0.1649, \quad E_{abs}(x^{(1)}) \approx 0.3$$

$$x^{(2)} = g(x^{(1)}) = g(0.1649) = \frac{1}{10}e^{0.1649} = 0.1179, \quad E_{abs}(x^{(2)}) \approx 0.05$$

$$x^{(3)} = g(x^{(2)}) = g(0.1179) = \frac{1}{10}e^{0.1179} = 0.1125, \quad E_{abs}(x^{(3)}) \approx 0.005$$

La solución exacta es $r = 0.1118\dots$, y los errores absolutos reales son:

$$E_{abs}(x^{(1)}) = 0.05, \quad E_{abs}(x^{(2)}) = 0.006, \quad E_{abs}(x^{(3)}) = 0.0007.$$

Método de punto fijo: resumen

Principales ventajas del método de punto fijo:

- Es fácil de implementar, en cada iteración, el nuevo valor se calcula simplemente aplicando la función $g(x)$ al último valor calculado.
- Es convergente con velocidad geométrica, con orden $p \geq 1$ y razón q “controlable”.

Principal desventaja:

- Es un método local (sólo converge a la raíz r si empezamos *suficientemente cerca*).
- Si tenemos una ecuación en forma estándar $f(x) = 0$, hay que transformarla previamente en una de punto fijo $g(x) = x$.

En el método de bisección sólo utilizamos como información los **signos** de la función f en los extremos del intervalo.

Para mejorar la velocidad de convergencia, podemos tratar de utilizar los **valores** de $f(x)$ (o de su derivada) en algún punto del intervalo.

La idea básica es utilizar el desarrollo en serie de Taylor de orden 1 para $f(x)$ en el punto $x_0 = r$:

$$f(x) = f(r) + f'(\xi)(x - r)$$

Como sabemos que $f(r) = 0$, resulta:

$$f(x) = f'(\xi)(x - r)$$

O sea, que podemos despejar r como:

$$r = x - \frac{f(x)}{f'(\xi)}$$

Lamentablemente, ξ y por tanto $f'(\xi)$ son desconocidos; si no lo fueran podríamos calcular r en una sola operación.

Sin embargo, con esta expresión podemos construir una sucesión de valores $x^{(n)} \rightarrow r$, utilizando un valor aproximado $q_n \approx f'(\xi^{(n)}) \approx f'(x^{(n)})$:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{q_n}$$

Según cómo se calcule q_n , obtendremos cada uno de los distintos métodos geométricos.

- Método de cuerda
- Método de la secante
- Método de *falsa regula* (o de falsa posición)
- Método de Steffensen
- **Método de Newton-Raphson**

Método de Newton-Raphson

Suponiendo que $f \in \mathcal{C}^1$ en un entorno de r , y que r es raíz simple, podemos calcular q_n como la derivada de f en $x^{(n)}$, es decir:

$$q_n = f' \left(x^{(n)} \right).$$

Así pues, dado un valor inicial $x^{(1)}$, obtenemos el método de Newton (o de Newton-Raphson), dado por la fórmula:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f \left(x^{(n)} \right)}{f' \left(x^{(n)} \right)}, \quad n \geq 1$$

Método de Newton-Raphson

Este método es un caso particular de la iteración de punto fijo, tomando:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Podemos por tanto aplicar la teoría de los métodos de punto fijo para estudiar su convergencia.

En particular $g'(r) = 0$ y por tanto el método tiene convergencia (local) de orden $p = 2$.

Método de Newton-Raphson: ejemplo

Ejemplo

Consideramos la ecuación $f(x) = e^{-2x} - 0.05 \sin(x - 0.8) = 0$, que tiene una raíz en el intervalo $[1, 3]$ (ya la hemos utilizado antes para el ejemplo del método de bisección). Tomamos como valor inicial el punto medio del intervalo: $x^{(0)} = 2$ y aplicamos 3 iteraciones del método de Newton, estimando el error en cada paso:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 0.4721, \quad E_{abs}(x^{(1)}) \approx 1.53,$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})} = 0.4721 - \frac{f(0.4721)}{f'(0.4721)} = 1.0265, \quad E_{abs}(x^{(2)}) \approx 0.55,$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})} = 1.0265 - \frac{f(1.0265)}{f'(1.0265)} = 1.5897, \quad E_{abs}(x^{(3)}) \approx 0.56,$$

La solución exacta es $r = 1.6437\dots$, y los errores absolutos reales son:
 $E_{abs}(x^{(1)}) = 1.17$, $E_{abs}(x^{(2)}) = 0.62$, $E_{abs}(x^{(3)}) = 0.05$.

Método de Newton-Raphson: resumen

Principales ventajas del método de Newton-Raphson:

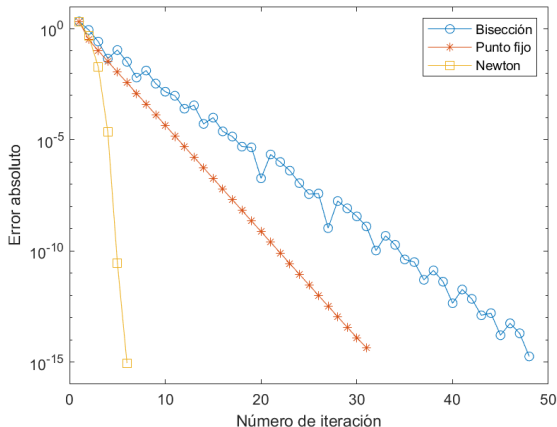
- Converge con velocidad geométrica y orden $p = 2$.

Principales desventajas:

- Es un método local (solo converge cuando estamos *suficientemente cerca* de la raíz r).
- Requiere calcular f' previamente.
- Requiere evaluar dos funciones en cada iteración, f y f' .

Comparativa de métodos

Vamos a comparar la convergencia de los distintos métodos aplicándolos a resolver la ecuación $f(x) = 1/2 \cos(0.7x + 2) - 4.8 - x = 0$, o equivalentemente $x = g(x) = 1/2 \cos(0.7x + 2) - 4.8$, cuya solución exacta es $r = -4.642081$.



Comparativa de métodos

Soluciones aproximadas en las primeras iteraciones ($r_{exacta} = -4.642081$):

Iteración	Bisección	Newton	Punto Fijo
1	-2.5	-2.5	-2.5
2	-3.75	-4.170862	-4.315544
3	-4.375	-4.622718	-4.538692
4	-4.6875	-4.642059	-4.608191
5	-4.53125	-4.642081	-4.630872

Error absoluto cometido en las primeras iteraciones:

Iteración	Bisección	Newton	Punto Fijo
1	2.14	2.14	2.14
2	0.89	0.47	0.33
3	0.27	0.019	0.10
4	0.05	0.000022	0.03
5	0.11	0.000000000029	0.01