Señales y Sistemas

Grado en Ingeniería de Computadores

Revisión matemáticas

José Sáez Landete

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones – Universidad de Alcalá

Curso 2015-16

Contenidos

Representación

Un número complejo z se suele representar en dos formas:

- Cartesiana:

$$z = a + jb,$$

  donde j representa la unidad imaginaria (también denominada i) y a y b son números reales.
  Se definen:
  - $j = \sqrt{-1}$.
  - a es la parte real, $a = \mathrm{Re}\{z\}$.
  - b es la parte imaginaria, $b = \mathrm{Im}\{z\}$.
- Polar:

$$z = re^{j\theta},$$

  donde r es el módulo ($r > 0$) y θ es la fase de z. Se suelen denotar por:

$$r = |z|, \quad \theta = \arg\{z\}$$

Ejemplo:

$j^2 =?, \quad j^3 =?, \quad j^4 =?$

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

Ejemplos:

- $e^0 = ?$
- $e^{j\pi/2} = ?$
- $e^{j\pi} = ?$
- $e^{j3\pi/2} = ?$
- $e^{j2\pi} = ?$

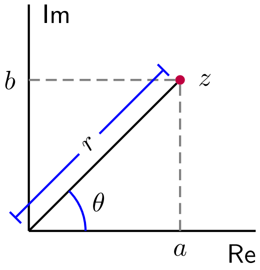
Ejercicio

Demostrar que:

$$1 + e^{-j\omega t} = 2\cos(\omega t/2)e^{-j\omega t/2}$$

Relación entre representaciones

Dado $z = a + jb = re^{j\theta}$:



Cartesiana ⇒ polar

$$a = r\cos(\theta)$$
$$b = r\sin(\theta)$$

Polar ⇒ Cartesiana

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

En matlab

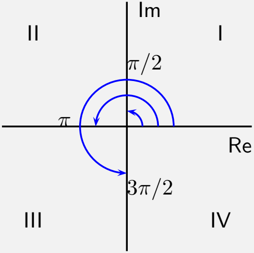
$\gg$ r=abs(z);
$\gg$ θ = angle(z);

Consideraciones sobre la fase

Ángulo o fase

Típicamente trabajamos en radianes: $360^\circ \Rightarrow 2\pi$ rad

Cuadrantes



La función $\arctan(b/a)$ solo puede identificar los cuadrantes I y IV. Para obtener el resto es necesario sumar π

Ejemplo

Calcular el ángulo (o la fase) de $z = -3 + 4j$

Operaciones básicas

Sea $z_j = a_j + jb_j = r_j e^{j\theta_j}$, donde $j = 1, 2$:

Suma

$z_3 = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2))$

Multiplicación

- Cartesiana: $z_3 = z_1 * z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- Polar: $z_3 = z_1 * z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$

División

- Cartesiana:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2}$$

- Polar:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Operaciones básicas

Potencia

$z^N = r^N e^{jN\theta}$

Ejemplo:

Demostrar que $(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^N = \cos(N\theta) + j\sin(N\theta)$

Ejemplo: raices de la unidad

¿cuales son las diferentes soluciones de la ecuación $z^4 = 1$?

Conjugado

Definición

Teniendo en cuenta que $z = a + jb = re^{j\theta}$:

- Cartesiana: $\bar{z} = z^* = a - jb$.
- Polar: $\bar{z} = z^* = re^{-j\theta}$

Reflexión sobre el eje de abscisas.

Ejemplos

- $|z|^2 = z \cdot z^*$
- $\frac{z}{z^*} =?$
- $z + z^* =?$
- $z - z^* =?$

Resolución de ecuaciones

Sea un polinomio:

$$P(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0$$

Teorema fundamental del algebra

Si los coeficientes $a_j,\ j = 0, .., N$ son reales, las raíces son: o bien reales, o bien son pares conjugados.

Obtención de las raices

- El método de Ruffini
- Mediante herramientas numéricas, por ejemplo, Matlab.
  $\gg$ r = roots($[a_N,\ a_{N-1},\ \ldots, a_0]$);

Expansión en fracciones simples

Sea un cociente de polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde el grado del denominador es mayor que el del numerador.

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

y α_j son los ceros reales y distintos. La descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - \alpha_1} + \frac{c_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - \alpha_n}$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1}$$

Expansión en fracciones simples

Si tenemos raices complejas conjugadas (caso irreducible):

$$\frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}.$$

Raices con multiplicidad r

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^r} = \frac{c_1}{x-\alpha} + \frac{c_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(x-\alpha)^r}.$$

Ejemplo:

$$\frac{3x+5}{(1-2x)^2} = \frac{A}{(1-2x)^2} + \frac{B}{(1-2x)} = \frac{13/2}{(1-2x)^2} + \frac{-3/2}{(1-2x)}.$$

Caso General

Grado del numerador mayor o igual que el denominador

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2+b_ix+c_i)^r}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^3+16}{x^3-4x^2+8x} = 1 + \frac{4x^2-8x+16}{x(x^2-4x+8)}$$

donde:

$$\frac{4x^2-8x+16}{x(x^2-4x+8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+8}$$

Finalmente:

$$f(x) = 1 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2-4x+8}\right)$$

Matlab

Se usa la función: [r,p,k] = residue([1 0 0 16],[1 -4 8 0])

Series geométricas

Suma	Condición
$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1}-a^{N_2+1}}{1-a}$	ninguna
$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$	ninguna
$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$	$\lvert a\rvert < 1$

Ejercicio

Calcular la suma:

$$S = \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Algunas integrales típicas

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1},\ n \neq 1$$

$$\int \sin(ax) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax)$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$