Control y Automatización, IOI

Tema 2: Respuesta temporal de sistemas continuos (I)

la respuesta de un sistema es la suma de la respuesta forzada
(también llamada respuesta estacionaria o solución particular)
y la respuesta natural (solución homogénea)

Para encontrar la respuesta de un sistema de control podemos resolver la ecuación diferencial…… o podemos representar el sistema mediante su función de transferencia y calcular su transformada inversa de Laplace…pero también podemos evaluar cualitativamente cuál es la respuesta de un sistema simplemente analizando los polos y los ceros del sistema

los polos de la señal de entrada determinan la respuesta forzada
los polos de la función de transferencia determinan la respuesta natural

¿qué significa lo anterior?

En la Sesión #1 de MATLAB resolviste la respuesta de un sistema a una entrada constante:

$$H_2(s) = \frac{20}{s^2 + 6s + 144}$$

a partir de estos polos, del tema anterior ya sabemos que la respuesta natural del sistema será la convolución de una exponencial decreciente con una función oscilante

polos de $H_2(s) : -3 \pm 3\sqrt{15}i$

$$C_2(s) = \frac{20}{s(s^2 + 6s + 144)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 6s + 144}$$

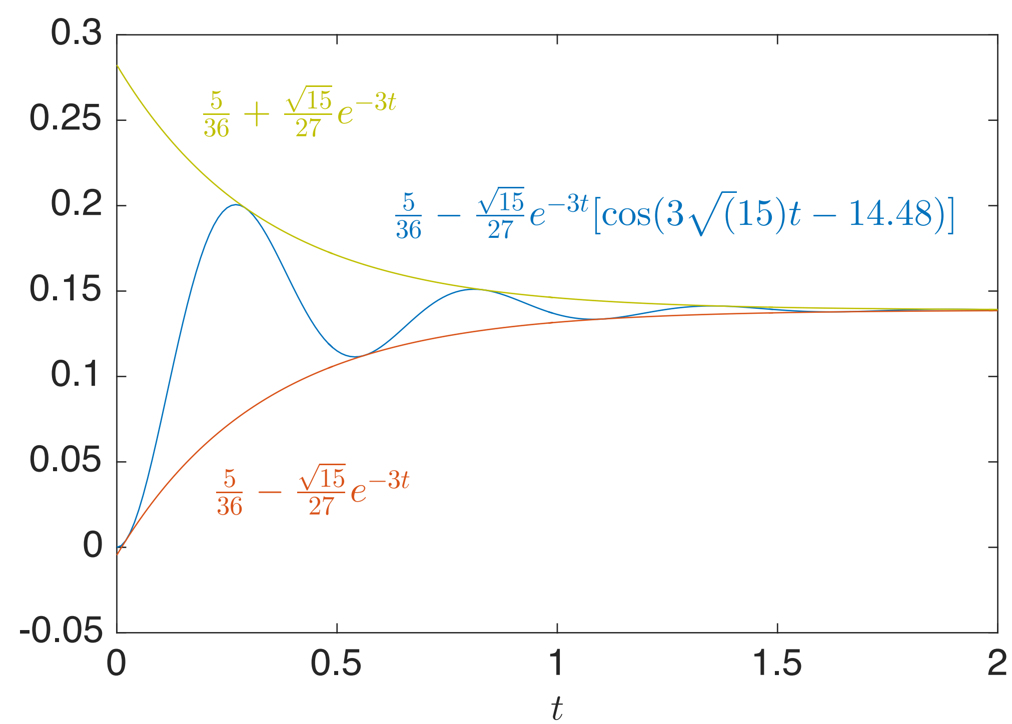
respuesta forzada

respuesta natural

$$c_2(t) = \frac{5}{36} - \frac{5}{36}e^{-3t}[\cos(3\sqrt{15}t) + \frac{\sqrt{15}\sin(3\sqrt{15}t)}{15}]$$

$$= \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{27}e^{-3t}\cos[(3\sqrt{15}t - 14.48)]$$

explica la forma gráfica de la solución a partir de la expresión de c(t)



Tipos de formas de onda de entrada utilizados en sistemas de control:

TABLE 1.1 Test waveforms used in control systems

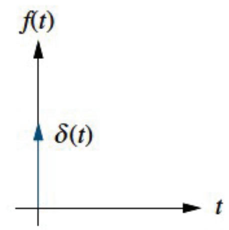
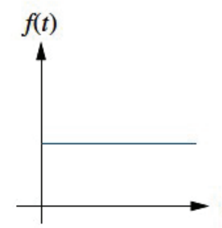
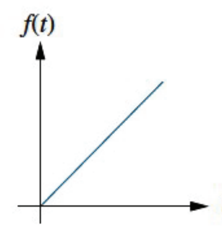
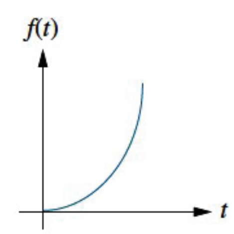
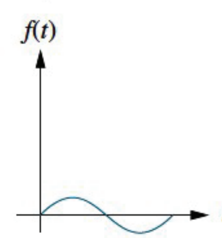
Input	Function	Description	Sketch	Use
Impulse	$\delta(t)$	$\delta(t) = \infty$ for $0- < t < 0+$ $= 0$ elsewhere $\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1$		Transient response Modeling
Step	$u(t)$	$u(t) = 1$ for $t > 0$ $= 0$ for $t < 0$		Transient response Steady-state error
Ramp	$tu(t)$	$tu(t) = t$ for $t \geq 0$ $= 0$ elsewhere		Steady-state error
Parabola	$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{2}t^2u(t) = \frac{1}{2}t^2$ for $t \geq 0$ $= 0$ elsewhere		Steady-state error
Sinusoid	$\sin \omega t$			Transient response Modeling Steady-state error

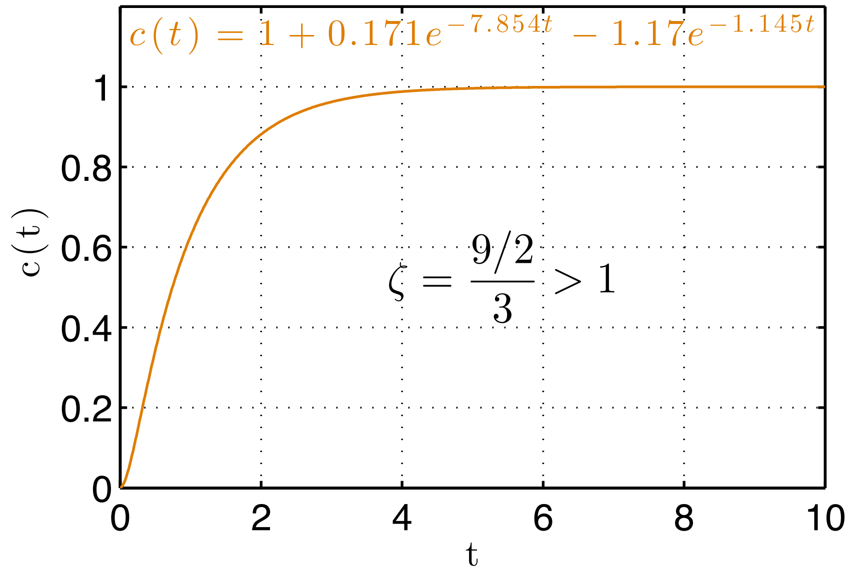
Table 1.1
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Tipos de respuesta temporal de sistemas de segundo orden

consideramos respuesta a una función escalón: $R(s) = \frac{1}{s}; C(s) = G(s) \cdot R(s)$

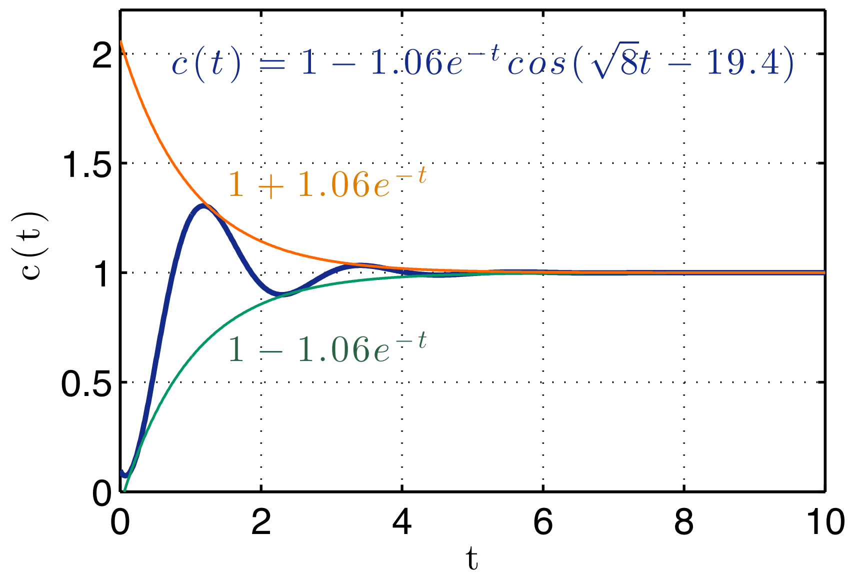
$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9s + 9}$$

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)} \Rightarrow c(t)$$



¿polos de la función de transferencia en cada caso?

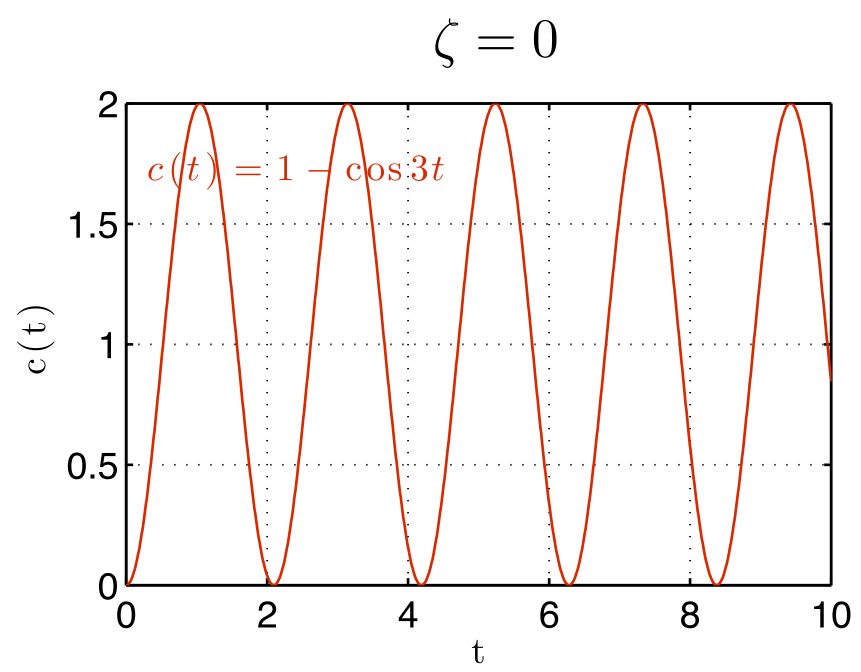
$$\zeta = \frac{2/2}{3} < 1$$



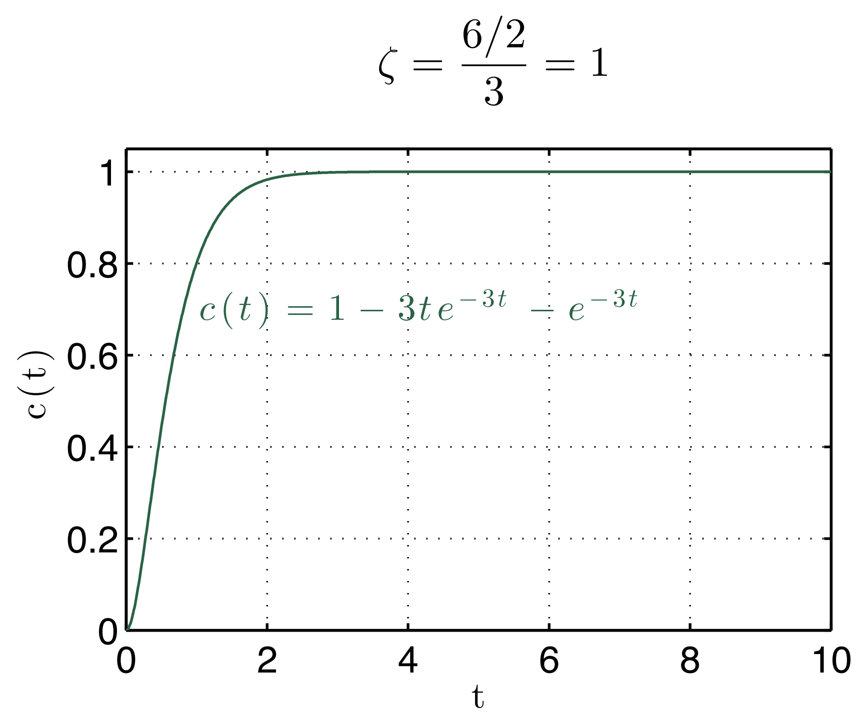
$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 9}$$

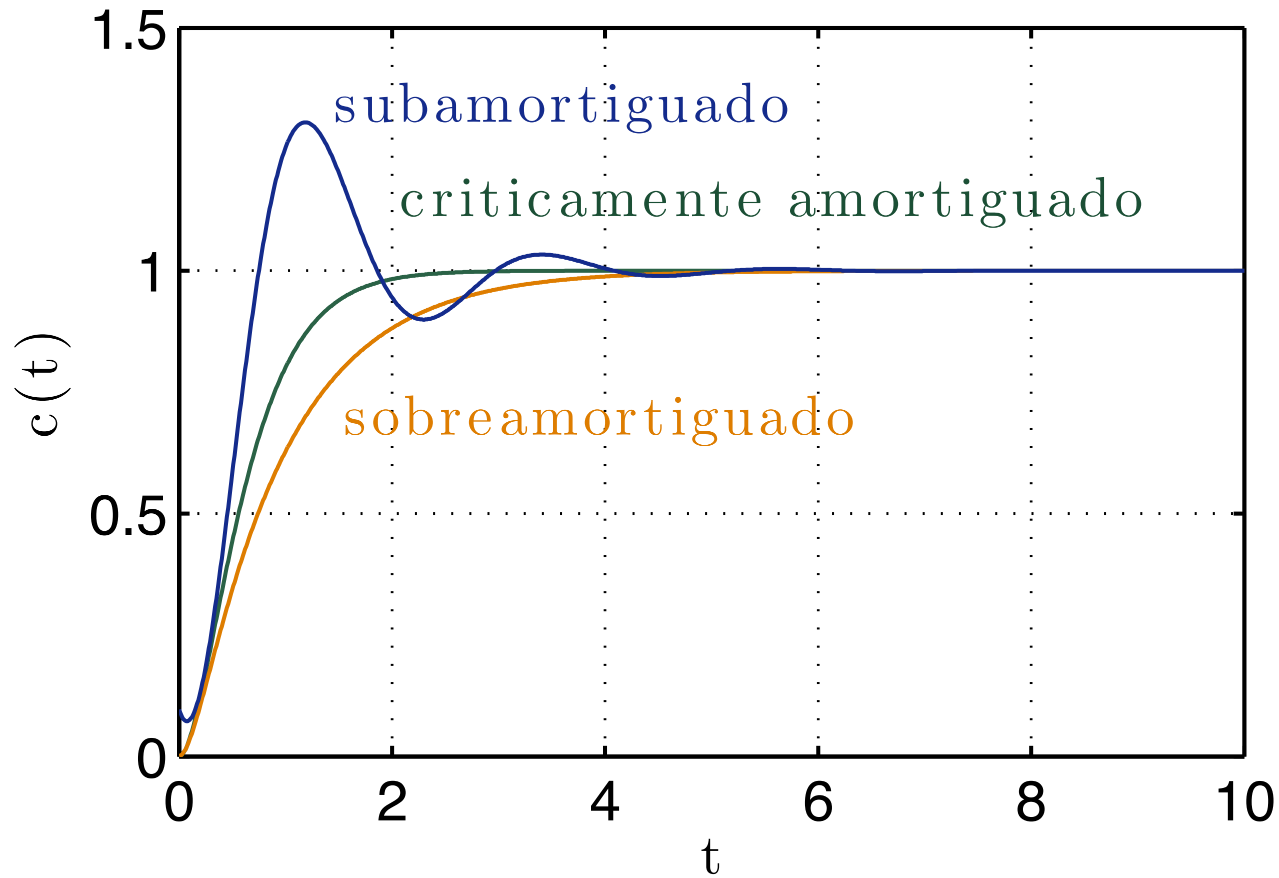
$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 2s + 9)} \Rightarrow c(t)$$

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 9}$$



$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 6s + 9}$$





¿qué relación existe entre la respuesta transitoria del sistema y los polos de su función de transferencia?

Definimos razón de amortiguamiento: ζ

los casos anteriores se pueden caracterizar a partir de este coeficiente

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

$$\zeta = \frac{\text{frecuencia de amortiguamiento}}{\text{frecuencia natural de oscilacion}} = \frac{a/2}{\sqrt{b}}$$

¿sabes explicar por qué tiene esta expresión?

tipos de respuesta de los sistemas de segundo orden a una función escalón en función de la razón de amortiguamiento:

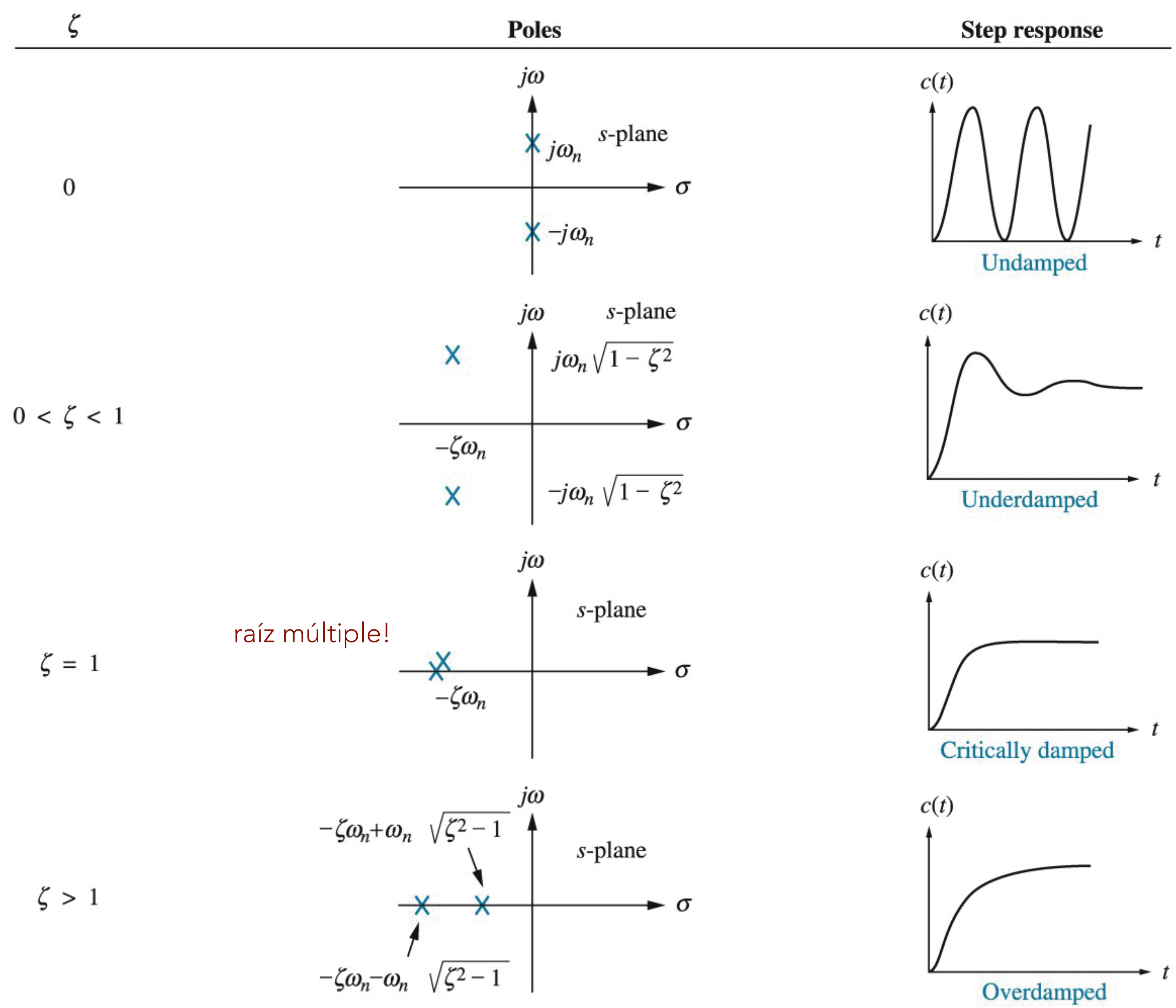


Figure 4.11

© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

En la sesión #2 de MATLAB trabajarás con los siguientes parámetros que caracterizan la respuesta temporal:

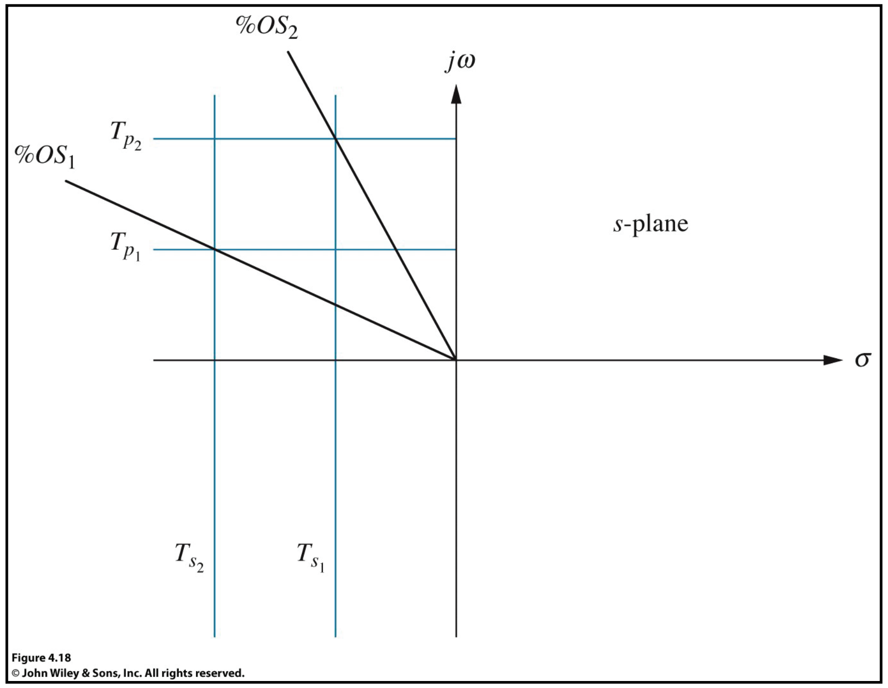
T_r, Rise time

T_p, Peak time

$\%OS$, Percent overshoot

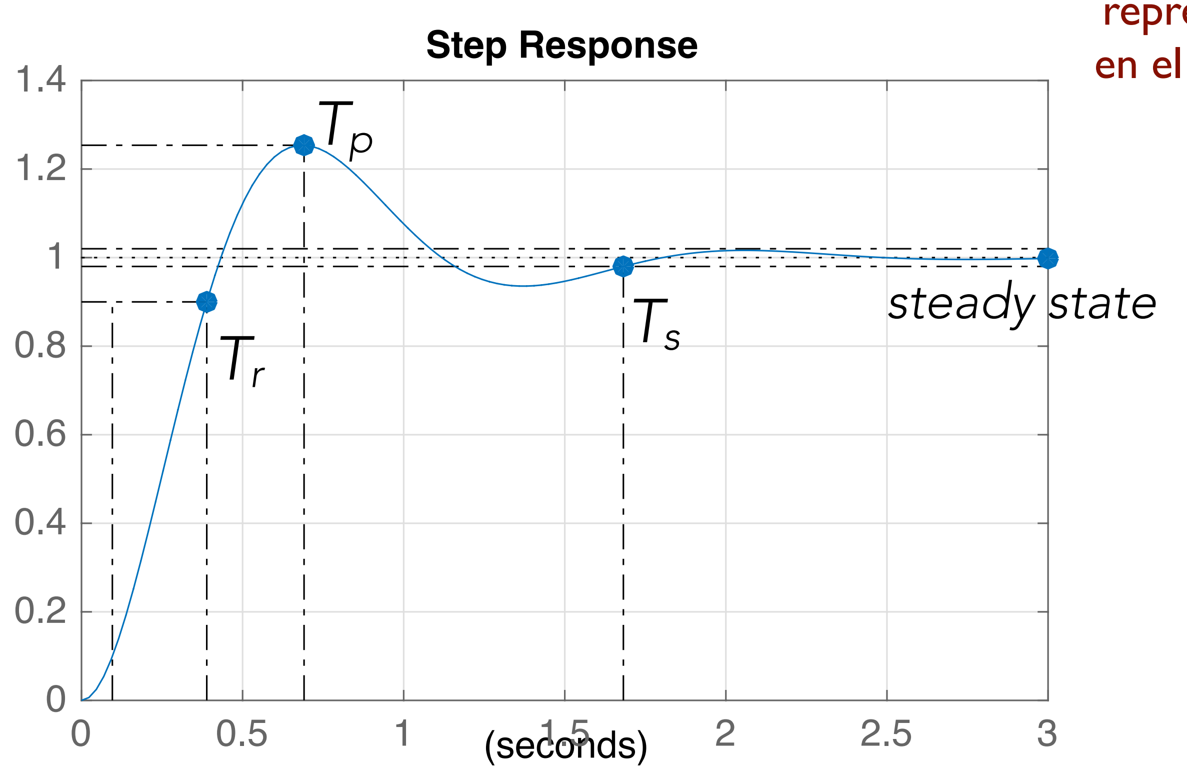
T_s, Settling time

Steady state



representación de líneas de T_p, T_s y $\%OS$ constante en el plano s

(T_s tiene esa representación en su forma aproximada!!)



$$G(s) = \frac{20}{s^2 + 8s + 20}$$

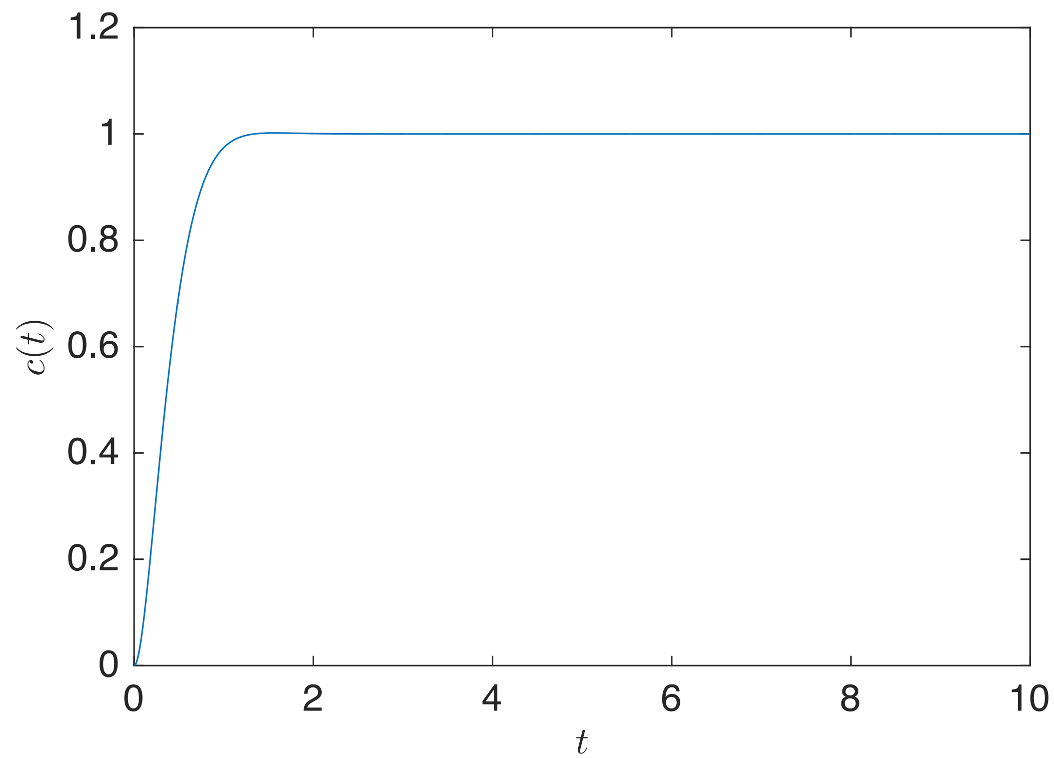
¿qué tipo de sistema es?

¿cuál es el valor de su coeficiente de amortiguamiento?

Respuesta del sistema a una función escalón:

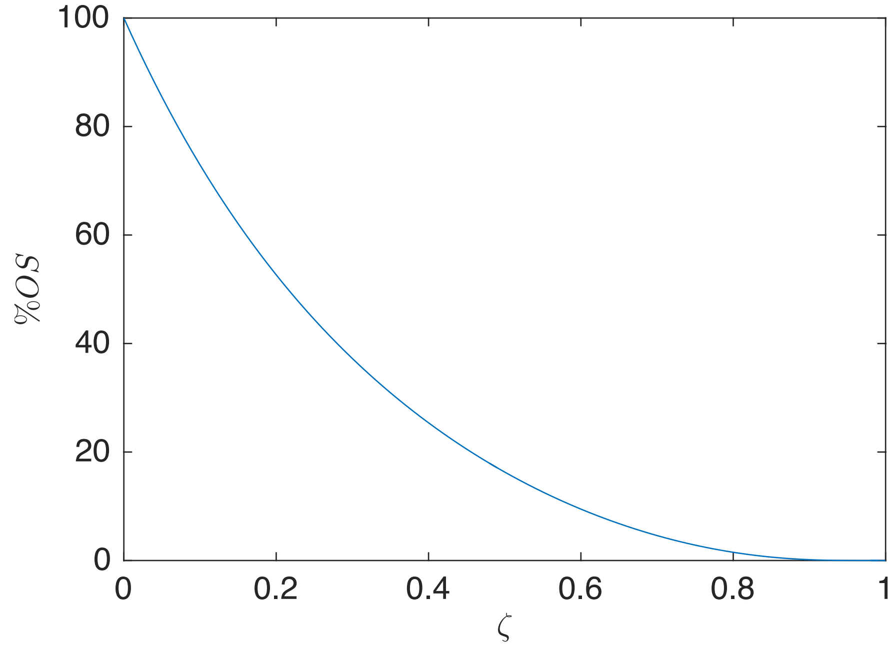
$$C(s) = \frac{20}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

$$c(t) = 1 - e^{-4t}(\cos(2t) + 2\sin(2t))$$



es la gráfica
que esperabas??

$$\%OS = 100 \cdot e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



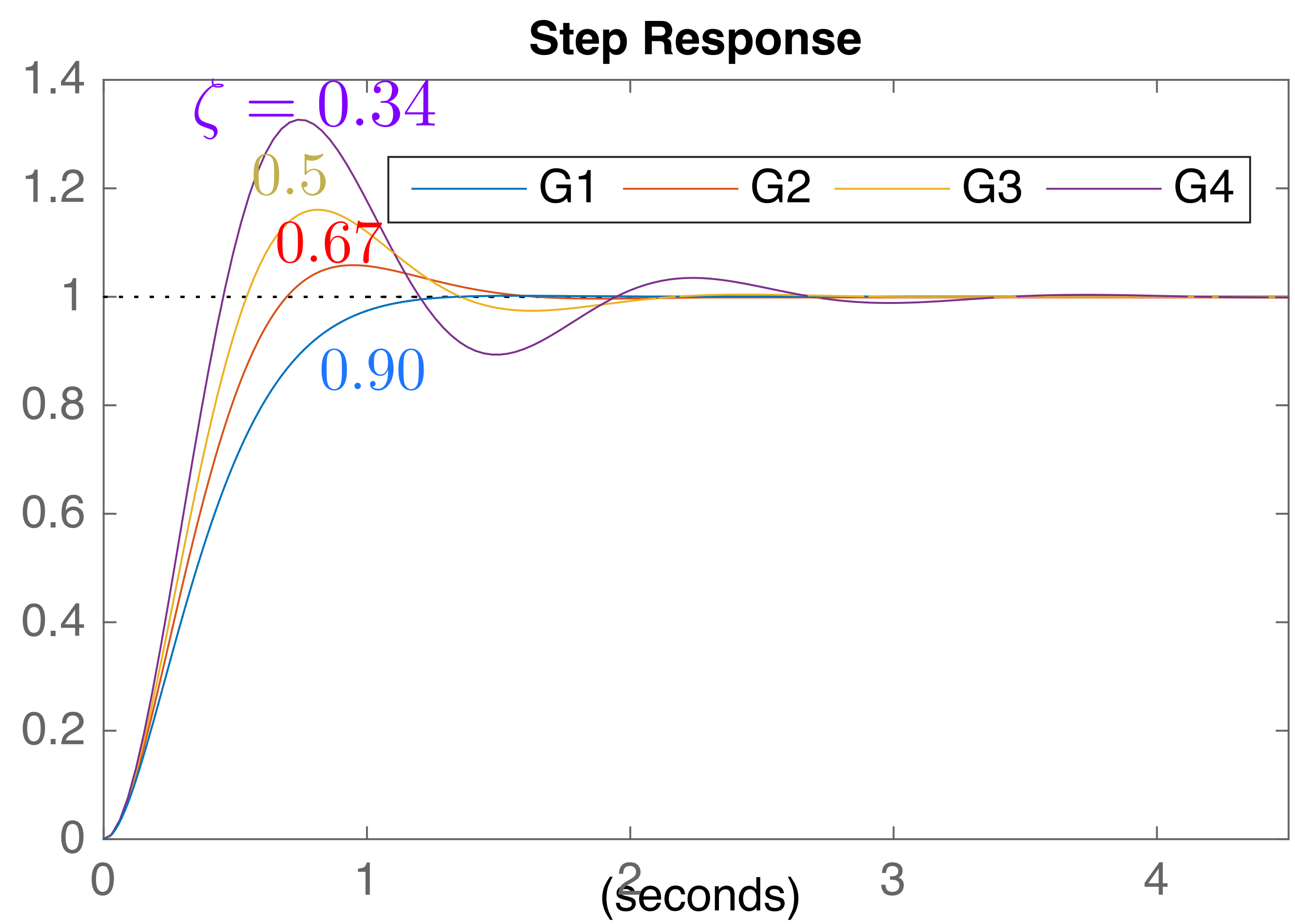
dependencia de %OS con ζ

$$G_1 = \frac{20}{s^2 + 8s + 20}$$

$$G_2 = \frac{20}{s^2 + 6s + 20}$$

$$G_3 = \frac{20}{s^2 + 4.5s + 20}$$

$$G_4 = \frac{20}{s^2 + 3s + 20}$$



Respuesta de sistemas con polos adicionales (sin ceros)

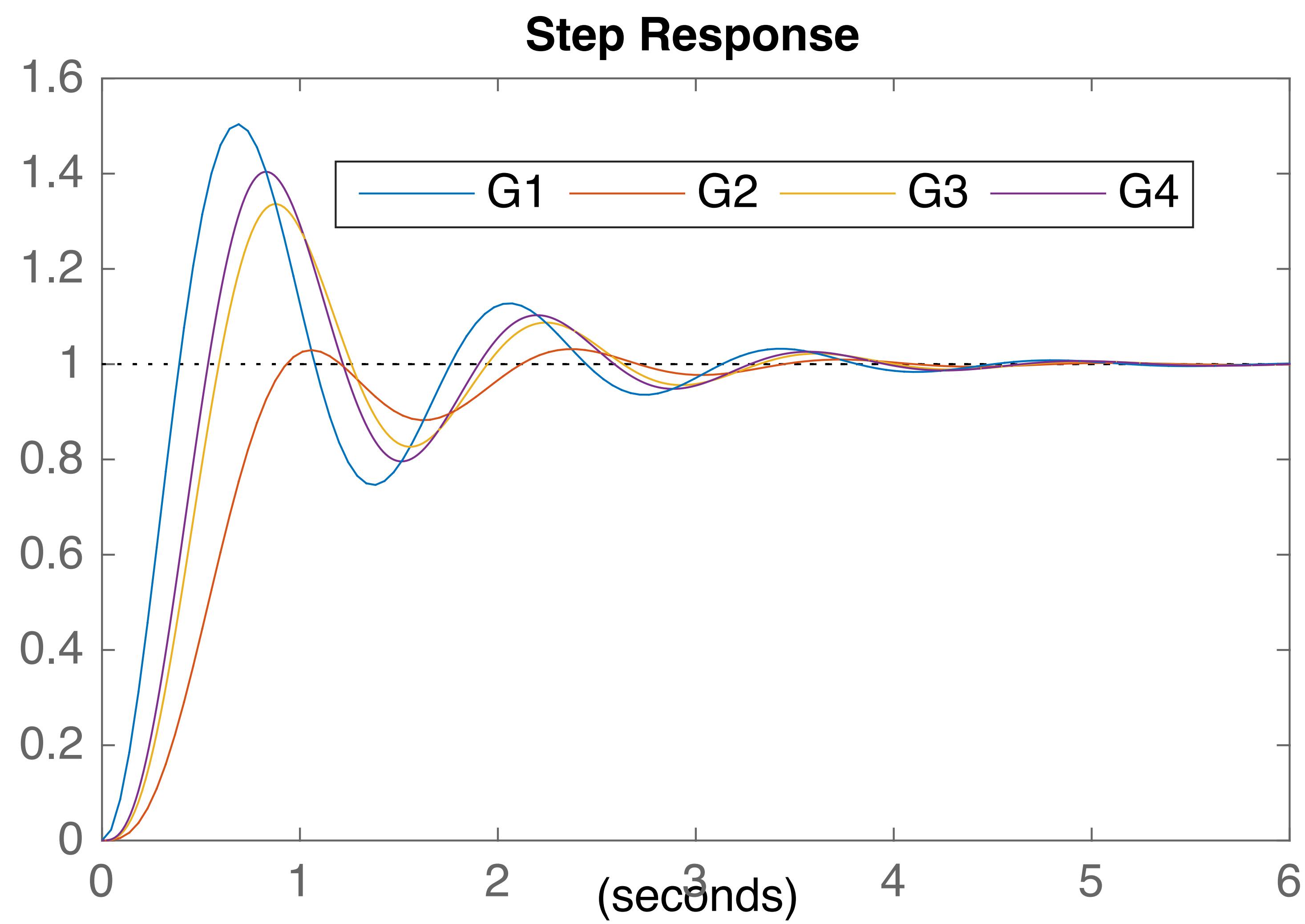
consideramos respuesta a una función escalón: $R(s) = \frac{1}{s}; C(s) = G(s) \cdot R(s)$

$$G_1 = \frac{22}{s^2 + 2s + 22}$$

$$G_2 = \frac{44}{(s+2)(s^2 + 2s + 22)}$$

$$G_3 = \frac{110}{(s+5)(s^2 + 2s + 22)}$$

$$G_4 = \frac{154}{(s+7)(s^2 + 2s + 22)}$$



¿qué tendencia observas? ¿cómo describes el efecto de la adición de un tercer polo?

si calculamos mediante transformada inversa de Laplace las funciones respuesta, c(t), de la transparencia anterior

$$c_1(t) = 1 - e^{-t}[\cos(\sqrt{21}t) + \frac{\sqrt{21}}{21}\sin(\sqrt{21}t)]$$

$$c_2(t) = 1 - e^{-2t} - \frac{2}{21}\sqrt{21}e^{-t}\sin(\sqrt{21}t)$$

$$c_3(t) = 1 - \frac{22}{37}e^{-5t} - \frac{15}{37}e^{-t}[\cos(\sqrt{21}t) + \frac{25\sqrt{21}}{63}\sin(\sqrt{21}t)]$$

$$c_4(t) = 1 - \frac{22}{57}e^{-7t} - \frac{35}{57}e^{-t}[\cos(\sqrt{21}t) + \frac{9\sqrt{21}}{35}\sin(\sqrt{21}t)]$$

razona a partir de las expresiones analíticas lo que has visto gráficamente!!!

Respuesta de un sistema con ceros

$$(s+a)C(s) = \underline{sC(s)} + \underline{aC(s)}$$

derivada de la respuesta original

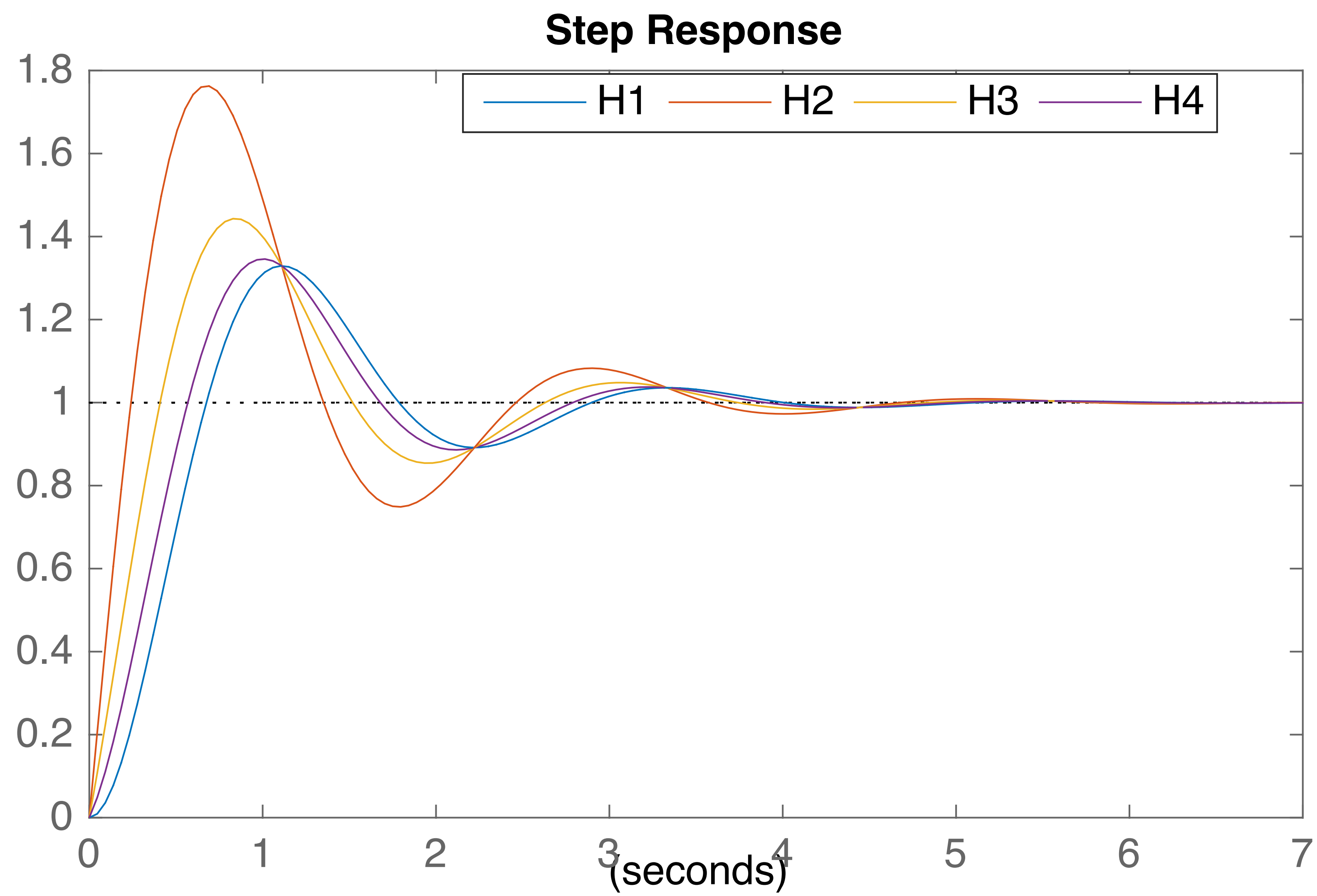
respuesta original multiplicada por *a*

$$H_1 = \frac{9}{s^2+2s+9}$$

$$H_2 = \frac{(9/2)(s+2)}{s^2+2s+9}$$

$$H_3 = \frac{3(s+3)}{s^2+2s+9}$$

$$H_4 = \frac{(9/10)(s+10)}{s^2+2s+9}$$



¿cómo describes el comportamiento de un sistema con ceros respecto al sistema sin ceros (H_1)?