

Relación 3 de problemas: Resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales, Problemas de Contorno

Grado Ingeniería en Organización Industrial: MM Aplicados a la Ingeniería

Curso 2018/2019

1. Resuelve el siguiente Problema de Contorno:

$$\begin{aligned}u''(x) + u(x) &= 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\u(0) &= 3, & u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7,\end{aligned}$$

cuya solución analítica viene dada por $u_{exact}(x) = 3 \cos(x) + 7 \sin(x)$ utilizando un esquema en diferencias finitas **centrado** y un tamaño de discretización $h = \frac{\pi}{8}$ y $h = \frac{\pi}{16}$.

2. Resuelve el siguiente Problema de Contorno:

$$\begin{aligned}u''(x) - u(x) &= 0, & 0 < x < 1 \\u(0) &= 0, & u(1) = 1,\end{aligned}$$

cuya solución analítica viene dada por $u_{exact}(x) = \frac{e}{1-e^2}(e^{-x} - e^x)$ utilizando un esquema en diferencias finitas **centrado** y un tamaño de discretización $h = 0.25$ y $h = 0.01$.

3. Resuelve el siguiente Problema de Contorno:

$$\begin{aligned}-u''(x) + u'(x) &= 0, & 0 < x < 1 \\u(0) &= 0, & u(1) = 1,\end{aligned}$$

cuya solución analítica viene dada por $u_{exact}(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$ utilizando un esquema en diferencias finitas **centrado** y un tamaño de discretización $h = 0.5$ y $h = 0.01$.

4. Considerar el problema de Contorno:

$$\begin{aligned}-u''(x) + u'(x) - u(x) &= 0, & x \in [1, 4] \\u(1) &= 1, & u(4) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Tomando pasos de discretización $h = 1$ y $h = 0.01$, plantear un esquema en diferencias finitas **descentrado progresivo** y resolver el problema expresando el resultado en forma de sistema de ecuaciones lineales $A\bar{u} = \bar{b}$.

5. Resuelve el siguiente Problema de Contorno:

$$\begin{aligned} -u''(x) + 3u'(x) + u(x) &= x + 1, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0, \end{aligned}$$

utilizando un esquema en diferencias finitas **centrado** y un tamaño de discretización $h = 0.5$ y $h = 0.01$.

6. Considérese el problema de Contorno:

$$\begin{aligned} -u''(x) + 2u'(x) + u(x) &= xe^x, & x \in (0, 1) \\ u'(0) = 1, & u(1) = 2e \end{aligned}$$

Resolver el problema planteando un esquema en diferencias **centradas**, obteniendo las ecuaciones que resultan para cada uno de los nodos que se obtienen al tomar tamaños de discretización $h = 1$ y $h = 0.01$. Escribir el sistema de ecuaciones en forma matricial.

7. Resuelve el siguiente Problema de Contorno bidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ T(x, 0) = 0, & T(x, 1) &= 100, & 0 \leq x \leq 1 \\ T(0, y) = 75, & T(1, y) &= 0, & 0 \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

con tamaño de paso $h_x = h_y = 0.25$ y $h_x = h_y = 0.1$.

8. Resuelve el siguiente Problema de Contorno bidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0, & R &= (10, 0) \times (0, 15) \\ T(x, 0) = 0, & T(x, 15) &= 100, & 0 \leq x \leq 10 \\ T(0, y) = 0, & T(10, y) &= 0, & 0 \leq y \leq 15, \end{aligned}$$

con tamaño de paso $h_x = h_y = 2.5$ y $h_x = h_y = 0.1$.

9. Resuelve el siguiente Problema de Contorno bidimensional:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad R = (10, 0) \times (0, 15),$$

donde:

Temperatura en el borde superior: $100^\circ C$

Temperatura en los bordes inferior e izquierdo: $0^\circ C$

El lado derecho de la placa está aislado: $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(10,y)} = 0, 0 \leq y \leq 15,$

con tamaño de paso $h_x = h_y = 5$ y $h_x = h_y = 0.1$.