# MATEMÁTICAS 2 – Prueba 2 (2013-14) 3 de junio de 2014

*Apellidos*.............................................................
*Nombre*............................... *DNI* ............. *Grupo* .........

Nota (1 decimal)

---

Esta prueba supondrá **4,5 puntos** de la calificación final de los alumnos de evaluación continua.

**EJERCICIO 1(1,5 puntos)**

a) (0,5 puntos) Estudie la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para estudiar la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$ primero vamos a ver si la función es continua en $(0,0)$, requisito necesario para que sea diferenciable.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$$

Estudiamos los límites direccionales según rectas $y = mx,\ m \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{3mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3mx}{x^2+m^2} = 0$$

Luego si existiera el límite de $f(x,y)$ tiene que ser 0.
Estudiamos el límite en la restricción de la función a la curva $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Al este límite distinto de los direccionales, podemos asegurar que no existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)$ tiende a $(0,0)$ y, entonces, $f(x,y)$ no es continua y, por tanto, no puede ser diferenciable en $(0,0)$.

b) (1 punto) Hallar el punto del plano $3x+2y+z=4$ que está más próximo al origen.

El punto de un plano que está más próximo al origen se puede determinar calculando el mínimo de la función que define la distancia de un punto cualquiera del espacio al origen, restringida a que el punto pertenezca al plano dado.
El plano viene dado por la ecuación: $3x+2y+z=4$, luego los puntos del plano cumplen: $z = 4-3x-2y$.
La distancia entre dos puntos se define como:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Y la distancia de un punto cualquiera al origen por la función:

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Como el punto pertenece al plano debe cumplir su ecuación y entonces tenemos:

$$d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+(4-3x-2y)^2}$$

Que es una función de dos variables, definida y diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, luego para hallar sus extremos buscaremos los puntos críticos, que son los únicos candidatos a extremos que tenemos.

Calculamos las derivadas parciales de $d(x, y)$ y las igualamos a 0

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial x} &= \frac{2x - 6(4 - 3x - 2y) = 2x - 24 + 18x + 12y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - 3x - 2y)^2}} = \frac{10x + 6y - 12}{\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - 3x - 2y)^2}} \\ \frac{\partial d}{\partial y} &= \frac{2y - 4(4 - 3x - 2y) = 2y - 16 + 12x + 8y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - 3x - 2y)^2}} = \frac{6x + 5y - 8}{\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - 3x - 2y)^2}}\end{aligned}$$

Y las igualamos a 0 para hallar los puntos críticos de la función

$$\begin{aligned}\frac{10x + 6y - 12}{\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - 3x - 2y)^2}} = 0 \Rightarrow 5x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{6 - 5x}{3} \\ \frac{6x + 5y - 8}{\sqrt{x^2 + y^2 + (4 - 3x - 2y)^2}} = 0 \Rightarrow 6x + 5y - 8 = 0\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $y$ obtenido de la primera ecuación en la segunda y operando se obtiene $x$

$$6x + 5\frac{6 - 5x}{3} - 8 = 0 \Rightarrow 18x + 30 - 25x - 24 = 0 \Rightarrow -7x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$$

Y metiéndolo en la primera ecuación hallamos $y$

$$y = \frac{6 - 5x}{3} \Rightarrow y = \frac{6 - 5\frac{6}{7}}{3} = \frac{\frac{42-30}{7}}{3} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Luego el punto del plano $3x + 2y + z = 4$ que está más próximo al origen es el $(\frac{6}{7}, \frac{4}{7})$.

# MATEMÁTICAS 2 – Prueba 2 (2012-13) 31 de mayo de 2013

*Apellidos*.............................................................
*Nombre*............................... *DNI* ............. *Grupo* .........

Nota (1 decimal)

---

**EJERCICIO 2(1,5 puntos)**

Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por $x^2 + y^2 - 4x + z = 0$ e inferiormente por el plano XY.

El sólido considerado es:

$$x^2 + y^2 - 4x + z = 0 \Rightarrow z = 4 - (x-2)^2 - y^2$$

que es un parabloide con vertice en el punto $(2, 0, 4)$, que corta al plano XY según la curva $C$ : $(x-2)^2 + y^2 = 4$, que es una circunferencia de centro $(2, 0)$ y radio 2.

Luego el volumen del sólido vendrá dado por:

$$V = \iint_C (4 - (x-2)^2 - y^2) dxdy$$

Para resolver esta integral podemos hacer un cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Calculamos los nuevos límites de integración, para ello expresamos la curva $C$ en coordenadas polares.

$$C : (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (\rho\cos\theta - 2)^2 + \rho^2 \sin^2\theta = 4 \Rightarrow$$
$$\rho^2\cos^2\theta - 4\rho\cos\theta + 4 + \rho^2\sin^2\theta = 4 \Rightarrow \rho^2 - 4\rho\cos\theta = 0 \Rightarrow \rho = 4\cos\theta$$

Entonces $0 \leq \rho \leq 4\cos\theta$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Como el determinante de la matriz jacobiana de la transformación a coordenadas polares vale $\rho$, la integral queda

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} (4 - \rho^2\cos^2\theta + 4\rho\cos\theta - 4 - \rho^2\sin^2\theta)\rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} (4\rho^2\cos\theta - \rho^3) d\rho d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4}{3}\rho^3\cos\theta - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{4\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4^4}{3}\cos^4\theta - \frac{4^4\cos^4\theta}{4}\right) d\theta = 4^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}\cos^4\theta - \frac{\cos^4\theta}{4}\right) d\theta =$$

$$= 4^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12}\cos^4\theta d\theta = \frac{4^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

Para resolver esta integral utilizamos las relaciones trigonométricas

$$\cos^2\theta = \tfrac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2 2\theta = \tfrac{1+\cos 4\theta}{2}$$
$$\cos^4\theta = \left(\tfrac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) = \tfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1+\cos 4\theta}{2}\right) = \tfrac{3}{8} + \tfrac{\cos 2\theta}{2} + \tfrac{\cos 4\theta}{8}$$

Y la integral queda

$$\frac{4^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8}\right) d\theta = \frac{4^3}{3}\left[\frac{3}{8}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4^3}{3}\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 8\pi$$

Luego el volumen del sólido es $8\pi$.

También se podría haber calculado el volumen haciendo una traslación de ejes para poner el origen de coordenadas en el centro de $C$. Este cambio sería $x^* = x - 2$ y la $y$ no varía, entonces, en las nuevas coordenadas el sólido sería $z = 4 - x^{*2} - y^2$ y la circunferencia $C : x^{*2} + y^2 = 4$. El determinante de la matriz jacobiana de esta transformación de coordenadas es 1.

Ahora hacemos el cambio a coordenadas polares, los límites de integración quedan $0 \leq \rho \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y la integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4\rho - \rho^3) d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}(8-4)d\theta = 4\theta]_0^{2\pi} = 8\pi$$

Obteniendo el mismo resultado.

# MATEMÁTICAS 2 – Prueba 2 (2012-13) 31 de mayo de 2013

*Apellidos*.................................................................
*Nombre*.............................. *DNI* ............. *Grupo* .........

Nota (1 decimal)

---

**EJERCICIO 3(1,5 puntos)**

a) Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{3x^2y+2x-y^2\cos x}{2y\sin x - x^3+\ln y} \\ y(0) = e \end{cases}$$

La ecuación diferencial que forma parte de este problema de valor inicial (PVI) puede ser una ecuación diferencial exacta, lo comprobamos poniendola en forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ y comprobando si las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ cumplen la condición para que la ecuación sea diferencial exacta, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

$$(y^2\cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y\sin x - x^3 + \ln y)dy = 0 \tag{1}$$

Calculamos las derivadas parciales, de $P$ respecto de $y$ y de $Q$ respecto de $x$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\cos x - 3x^2$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x - 3x^2$$

Luego la ecuación diferencial es exacta y sus soluciones vendrán dadas por las curvas $u(x,y) = C$, $C$ constante, siendo $u(x,y)$ una función tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

Integrando $p(x,y)$ con respecto a $x$ obtenemos $u$ que queda determinado excepto una constante con respecto a $x$, es decir una función de $y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = y^2\cos x - 3x^2y - 2x \Rightarrow u(x,y) = \int (y^2\cos x - 3x^2y - 2x)dx = y^2\sin x - x^3y - x^2 + \phi(y)$$

Para calcular $\phi(y)$ hacemos la derivada parcial de $u(x,y)$ respecto de $y$ e igualamos a $Q(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\sin x - x^3 + \phi'(y) = 2y\sin x - x^3 + \ln y$$

Es decir, $\phi'(y) = \ln y$ e integrando obtenemos $\phi(y)$

$$\phi(y) = \int \ln y dy$$

Esta integral se puede hacer por partes, considerando $u = \ln y \Rightarrow du = \frac{dy}{y}$ y $dv = dy \Rightarrow v = y$.

$$\phi(y) = y\ln y - \int y\frac{dy}{y} = y\ln y - y = y(\ln y - 1)$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación diferencial vendrán dadas por:

$$y^2\sin x - x^3y - x^2 + y(\ln y - 1) = C, \ C = \text{ constante}$$

Consideramos ahora la condición inicial $y(0) = e$ para hallar la solución del PVI

$$e^2\sin 0 - 0^3e - 0^2 + e(\ln e - 1) = C \Rightarrow 0 = C$$

Con lo que la solución del PVI quedará:

$$y^2 \sin x - x^3 y - x^2 + y(\ln y - 1) = 0$$