MATEMÁTICAS 2 – Prueba 2 (2012-13) **31 de mayo de 2013**

Apellidos..
Nombre................................ *DNI* .... *Grupo* ....

Nota (1 decimal)

Esta prueba supondrá **4,5 puntos** de la calificación final de los alumnos de evaluación continua.

EJERCICIO 1(1,5 puntos)

a) Estudie la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Calcule los extremos relativos y absolutos de $f(x,y) = x^2 - y + e^y$ en la región del plano definida por las desigualdades $x^2 - 1 \leq y \leq 1$.

---

a) Estudie la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para estudiar la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$ primero vamos a ver la existencia de derivadas parciales en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x0}{\sqrt{x^2+0}} - 0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0y}{\sqrt{0+y^2}} - 0}{y} = 0$$

Luego existen las dos derivadas parciales en $(0,0)$.
Ahora estudiamos la continuidad de la función $f(x,y)$ en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Haciendo un cambio a coordenadas polares el límite quedaría:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\rho\sin\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\sin\theta = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

y la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.
Estudiamos ahora la continuidad de las derivadas parciales. Para ello calculamos la función derivada parcial en cada caso.

Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

Con lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

calculamos los límites direccionales según las rectas $y = \lambda x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3 x^3}{\sqrt{(x^2+\lambda^2 x^2)^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3 x^3}{x^3(1+\lambda^2)^{3/2}} = \frac{\lambda^3}{(1+\lambda^2)^{3/2}}$$

Por tanto el límite no existe y $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

Aplicamos la definición de función diferenciable, $f(x,y)$ será diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}\right|}{||(x,y)-(0,0)||} = 0$$

Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2}$$

calculamos los límites direccionales según las rectas $y = \lambda x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\lambda| x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{|\lambda|}{1+\lambda^2}$$

Por tanto el límite no existe y $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

b) Calcule los extremos relativos y absolutos de $f(x,y) = x^2 - y + e^y$ en la región del plano definida por las desigualdades $x^2 - 1 \leq y \leq 1$.

La región de estudio estará limitada por abajo por la parábola $y = x^2 - 1$ y por arriba por la recta $y = 1$, siendo los puntos de corte de estas dos curvas $(-\sqrt{2}, 1)$ y $(\sqrt{2}, 1)$.

Estudiamos los puntos críticos de la función $f(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1 + e^y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ e^y = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (0,0) \text{ punto crítico}$$

Calculamos las derivadas segundas y la matriz hessiana en $(0,0)$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \end{array} \qquad H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$$

Luego tenemos un mínimo relativo en (0,0), donde $f(0,0) = 1$.

Estudiamos ahora que ocurre en la frontera de la región de estudio.

- $y = x^2 - 1$

  Restringimos la función a esta parabola y calculamos extremos de la restricción

$$\begin{array}{rcl} F_1(x) &=& x^2 - x^2 + 1 + e^{x^2-1} = 1 + e^{x^2-1} \\ F_1'(x) &=& 2xe^{x^2-1} \Rightarrow 2xe^{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ punto crítico} \\ F_1''(x) &=& 2e^{x^2-1} + 4x^2 e^{x^2-1} \Rightarrow F_1''(0) = 2 > 0 \text{ mínimo de } F_1, \text{ con } f(0,-1) = 1 + \frac{1}{e} \end{array}$$

- $y = 1$

  Restringimos la función a esta recta y calculamos extremos de la restricción

$$\begin{array}{rcl} F_2(x) & = & x^2 - 1 + e \\ F_2'(x) & = & 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ punto crítico} \\ F_2''(x) & = & 2 \Rightarrow F_1''(0) = 2 > 0 \text{ mínimo de } F_2\text{, con } f(0,1) = e - 1 \end{array}$$

También consideramos los los puntos de corte de la parábola con la curva como posibles extremos

$$f(-\sqrt{2}, 1) = 2 - 1 + e = 1 + e$$
$$f(\sqrt{2}, 1) = 2 - 1 + e = 1 + e$$

Luego, analizando todos los posibles candidatos a extremo, podemos concluir que $(0,0)$ es mínimo absoluto de $f(x,y)$ en la región de estudio y $(-\sqrt{2}, 1)$ y $(\sqrt{2}, 1)$ son máximos absolutos de $f(x,y)$ en la región de estudio.

MATEMÁTICAS 2 – Prueba 2 (2012-13) 31 de mayo de 2013

Apellidos. . . . .
Nombre. . . . . *DNI* . . . . *Grupo* . . . .

Nota (1 decimal)

EJERCICIO 2(1,5 puntos)

Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e inferiormente por el plano XY en la región definida por la desigualdad $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

El volumen del sólido considerado vendrá dado por

$$V = \iint_R \sqrt{16 - x^2 - y^2}dxdy$$

donde R es la región del plano definida por la desigualdad $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$.

Por otro lado podemos ver que R es un círculo de centro $(0, 2)$ y radio 2

$$x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

Hacemos un cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

con lo que R nos queda

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 4r\sin\theta \leq 0 \Rightarrow r \leq 4\sin\theta.$$

Luego los límites de integración serán $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq r \leq 4\sin\theta$, y el volumen del sólido vendrá dado por

$$V = \int_0^\pi \int_0^{4\sin\theta} \sqrt{16 - r^2}rdrd\theta.$$

Para resolver esta integral podemos hacer un cambio de variable de los llamados trigonométricos, en este caso

$$\begin{aligned} &r = 4\sin u \\ &dr = 4\cos udu \\ &r = 0 \Rightarrow u = 0 \\ &r = 4\sin\theta \Rightarrow u = \theta \end{aligned}$$

Y el volumen quedará

$$V = \int_0^\pi \int_0^\theta \sqrt{16 - 16\sin^2 u}\, 4\sin u\, 4\cos udud\theta = 64\int_0^\pi \int_0^\theta \sin u\cos^2 u\, dud\theta =$$

$$= 64\int_0^\pi \left[-\frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^\theta d\theta = -\frac{64}{3}\int_0^\pi (\cos^3\theta - 1)d\theta = -\frac{64}{3}\int_0^\pi (\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta - 1)d\theta =$$

$$= -\frac{64}{3}\left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} - \theta\right]_0^\pi = \frac{64}{3}\pi.$$

O bien resolverla como una integral inmediata

$$V = \int_0^\pi \int_0^{4\sin\theta} \sqrt{16 - r^2}rdrd\theta = \int_0^\pi \left[-\frac{1}{3}(16 - r^2)^{3/2}\right]_0^{4\sin\theta} d\theta = -\frac{64}{3}\int_0^\pi (\cos^3\theta - 1)d\theta,$$

llegando al mismo resultado.

MATEMÁTICAS 2 – Prueba 2 (2012-13) **31 de mayo de 2013**

Apellidos..
Nombre................................. *DNI* .... *Grupo* ....

Nota (1 decimal)

EJERCICIO 3(1,5 puntos)

a) Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + x^2 y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

b) Plantee un algoritmo numérico para encontrar una solución de este problema de valor inicial en $x = 5$, con un paso $h = 0{,}1$ y explique por qué lo ha elegido.

---

a) Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + x^2 y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La ecuación diferencial que forma parte de este problema de valor inicial (PVI) es una ecuación diferencial lineal. Para resolverla primero hallaremos una solución de la ecuación homogenea y aplicaremos después el método de variación de las constantes.

La ecuación homogénea es $y' + x^2 y = 0$

Tenemos que la función nula $y = 0$ es solución de esta ecuación.

Si consideramos que $y \neq 0$ entonces podemos dividir por y en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{y} = -x^2 dx \Rightarrow \ln y = C - \frac{x^3}{3} \Rightarrow y = \pm e^C e^{-\frac{x^3}{3}} = K e^{-\frac{x^3}{3}} \text{ con } K \neq 0$$

Incorporando la solución $y = 0$, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea vendrán dadas por

$$y = K e^{-\frac{x^3}{3}} \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Aplicamos ahora el método de variación de las constantes para hallar las soluciones de la ecuación completa, para ello tomamos como solución de la ecuación completa $y = K(x) e^{-\frac{x^3}{3}}$. Entonces $y'(x) = K'(x) e^{-\frac{x^3}{3}} - K(x) x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}$ y sustituyendo en la ecuación obtenemos $K(x)$

$$K'(x) e^{-\frac{x^3}{3}} - K(x) x^2 e^{-\frac{x^3}{3}} + x^2 K(x) e^{-\frac{x^3}{3}} = x^2 \Rightarrow K'(x) = x^2 e^{\frac{x^3}{3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K(x) = \int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx = e^{\frac{x^3}{3}} + C$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial será

$$y = \left(e^{\frac{x^3}{3}} + C \right) e^{-\frac{x^3}{3}} = C e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales se obtiene la solución del PVI

$$y(0) = c + 1 = 2 \Rightarrow c = 1$$

Y la solución es

$$y = e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$$

También podríamos haber utilizado que es una ecuación separable. En efecto, si la ponemos en la forma

$$y' = x^2(1-y)$$

tenemos una ecuación separable que, suponiendo que $y \neq 1$ podemos resolver integrando directamente

$$\frac{dy}{1-y} = x^2dx \Rightarrow -\ln(1-y) = \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow |1-y| = e^{-\frac{x^3}{3}+C} \Rightarrow 1-y = \pm e^C e^{-\frac{x^3}{3}} = Ke^{-\frac{x^3}{3}} \text{ con } K \neq 0$$

con lo que

$$y = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}} \text{ con } C = -K \text{ y } C \neq 0$$

Por último, $y = 1$ también es solución con lo que se incorpora a las soluciones de la ecuación diferencial permitiendo tomar a la constante C el valor 0.

b) Plantee un algoritmo numérico para encontrar una solución de este problema de valor inicial en $x = 5$, con un paso $h = 0{,}1$ y explique por qué lo ha elegido.

En este caso, y dado que el punto donde queremos evaluar la solución del PVI está relativamente alejado del punto donde tenemos la condición inicial, la fórmula de Taylor no serviría para aproximar la solución y el método de Euler básico probablemente tampoco fuera suficientemente aproximado, por tanto, atendiendo también al coste computacional, la mejor opción es elegir uno de los métodos de Euler mejorado/modificado.

Por ejemplo, el algoritmo numérico del método de Euler mejorado para el paso $i+1$ sería el siguiente

$$\begin{array}{rcl} y_{i+1} & = & y_i + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2 \\ K_1 & = & hf(x_i, y_i) \\ K_2 & = & hf(x_i + h, y_i + K_1) \end{array}$$

que, teniendo en cuenta que la ecuación diferencial se puede poner como $y' = x^2(1-y) = f(x,y)$, el algoritmo quedaría

$$\begin{array}{rcl} y_{i+1} & = & y_i + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2 \\ K_1 & = & 0{,}1x_i^2(1-y_i) \\ K_2 & = & 0{,}1(x_i + 0{,}1)^2(1 - y_i - K_1) \end{array}$$