Mat II (GIB) - 11/4/2016 Prueba 1 (EC). 45 puntos (= 45 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 90 minutos**

TEST. (10 puntos) Tiempo 30 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.25** En blanco 0.

	SI	NO	
1.		x	Todo subconjunto no vacio de reales tiene ínfimo que además es único.
2.		x	Si a, b son irracionales, entonces $a^2 + b^2$ es irracional.
3.		x	Si el conjunto A es numerable y el conjunto B es no numerable, entonces $A \cap B$ es no numerable.
4.	x		Las soluciones de la desigualdad $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$ son $x \in [-\infty, 0] \cup \{1\}$.
5.		x	Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, entonces l es un punto de acumulación de $Im(f)$.
6.	x		$\cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \cosh 2x$.
7.	x		Sea $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ con $f > 0$ continua y creciente. Entonces, si $f(0) = \pi$ se tiene $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{\pi}$.
8.		x	Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.
9.	x		El polinomio de Taylor de orden 3 de senh centrado en cero es $x + \frac{x^3}{3!}$.
10.		x	$\operatorname{sen} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}), x \to 0$.

Mat II (GIB) - 11/4/2016 **Prueba 1 (EC) Problemas. (35 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 60 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja.

1. **(10 puntos)** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demuestre que entonces f ha de ser acotada (Primer teorema de Weierstrass).

2. **(5 puntos)** Considere las funciones $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y $g(x) = e^x - 1$. Calcule el límite $\dfrac{f(x)}{g(x)}, x \to 0$.

3. **(20 puntos)** Considérese la función $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

   a) **(5 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.

   b) **(10 puntos)** Estudie la existencia de puntos singulares (o críticos) y extremos. Caso de existir, clasifíquelos.

   c) **(5 puntos)** Estudie su paridad y monotonía y esboce su gráfica.

SOLUCION:

1. Puesto que f es continua en $D \equiv [a, b]$, es localmente acotada en todo punto $x \in [a, b]$. Quiere decirse que para cada x existen una constante K_x y un entorno $U(x)$ tales que $\forall x \in U_D(x)$ $|f(x)| \le K_x$, con $U_D(x) \equiv U(x) \cap D$. Es claro que $[a, b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} U_D(x) \subset \bigcup_{x\in[a,b]} U(x)$, por lo que los entornos $U(x)$ constituyen un recubrimiento abierto del intervalo cerrado. Es por tanto posible extraer un subrecubrimiento finito, digamos $U(x_1), \ldots, U(x_n)$. Sea $K := \max\{K_1, \ldots, K_n\}$. Entonces, para todo punto $x \in [a, b]$ se tendrá que $x \in \bigcup_{j=1}^{n} U_D(x_j)$ y por tanto $x \in U_D(x_{j_0})$, para algún $j_0 = 1, 2, \ldots, n$ y se tendra que $|f(x)| \le K_{x_{j_0}} \le K$, como se quería demostrar.

   También es posible la siguiente demostración, vía sucesiones. Supongamos que f no está acotada. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ es posible encontrar $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. Como la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada, posee una subsucesión $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ convergente a cierto $x \in \mathbb{R}$. Este x está, de hecho, en $[a, b]$ pues, de lo contrario, existiría $\varepsilon > 0$ de modo que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [a, b] = \varnothing$, contradiciendo que $(x_{r_n})_{n=1}^{\infty}$ converja a x. Como f es continua en x, el criterio secuencial garantiza que $\lim_{n\to\infty} f(x_{r_n}) = f(x)$, lo que implica que $\boxed{\left(f(x_{r_n})\right)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesión acotada.}}$ Sin embargo, como para $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|f(x_{r_n})| > r_n \ge n$, el criterio del sándwich establece que $\lim_{n\to\infty} |f(x_{r_n})| = +\infty$, y por tanto $\boxed{\left(f(x_{r_n})\right)_{n=1}^{\infty} \text{ no está acotada,}}$ lo cual es una contradicción.

2. Tanto $\operatorname{sen} x$ como g son derivables en $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$ con $g(x) \neq 0$ y $g'(x) = e^x \neq 0$ para $x \in A$. Además, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x} = 1\,,$$

   entonces, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{g(x)} = 1$.

   Observemos también que $g(x) \sim x$ y $\operatorname{sen} x \sim x, x \to 0$, por lo que de nuevo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1\,.$$

   Por otro lado,

$$0 \le |\operatorname{sen} x|\,|\operatorname{sen} \tfrac{1}{x}| \le |\operatorname{sen} x|\,.$$

Como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$, el criterio del sándwich garantiza que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$. También podemos llegar a la misma conclusión razonando que al ser $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ localmente acotada en torno a cero y ser $\operatorname{sen} x \to 0, x \to 0$ el límite de su producto será cero.

Por último, usando que, cuando existe el límite de cada factor, el límite del producto es igual al producto de los límites, concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{g(x)}\right) \lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

3. *a*) Como la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x}$ es continua en $[-1, 1]$, el teorema fundamental del cálculo garantiza que la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

es derivable en $[-1, 1]$. Por otro lado, como f es par,

$$F(x) = 2\int_0^{x^2} f(t)\, dt = 2g(x^2)\,.$$

Puesto que F es composición de funciones derivables en $[-1, 1]$, es derivable (y, por tanto, continua) en $[-1, 1]$.

b) Si aplicamos el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, obtenemos que

$$F'(x) = \frac{4x}{1 + \sin^2 x^2}\,,$$

que tiene un único punto crítico en 0.
Usando las propiedades de las derivadas, tenemos que

$$F''(x) = \frac{4 + 4\sin^2 x^2 - 16x^2 \sin x^2 \cos x^2}{\left(1 + \sin^2 x^2\right)^2}\,.$$

Como $F''(0) = 4 > 0$, el criterio de la segunda derivada garantiza que la función F tiene en 0 un mínimo local.
Los puntos -1 y 1, como extremos del intervalo en el que está definida F, también son candidatos a ser extremos locales. Teniendo en cuenta que f es estrictamente positiva, deducimos que si $x \in (0, 1)$, entonces

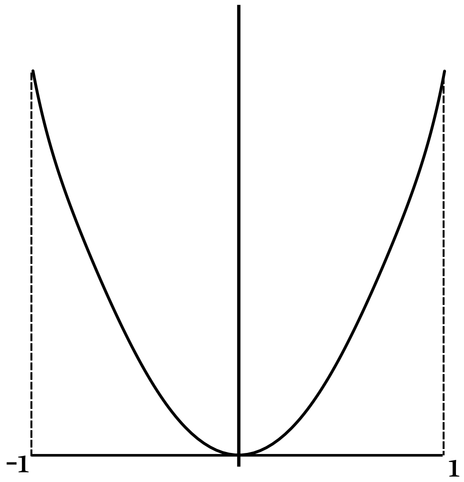
$$F(1) = 2\int_0^1 f(t)\, dt = 2\int_0^{x^2} f(t)\, dt + 2\int_{x^2}^1 f(t)\, dt > 2\int_0^{x^2} f(t)\, dt = F(x)\,,$$

luego F tiene en 1 un máximo local estricto.
Análogamente, si $x \in (-1, 0)$, entonces

$$F(-1) = 2\int_0^{(-1)^2} f(t)\, dt = 2\int_0^{x^2} f(t)\, dt + 2\int_{x^2}^1 f(t)\, dt > 2\int_0^{x^2} f(t)\, dt = F(x)\,,$$

luego F tiene en -1 un máximo local estricto.

c) Como $F(-x) = 2\int_0^{(-x)^2} f(t)\, dt = 2\int_0^{x^2} f(t)\, dt = F(x)$, la función F es par.
Sabemos que $F'(x) = \frac{4x}{1+\sin^2 x^2}$, que claramente es positiva en $(0, 1]$ y negativa en $[-1, 0)$, luego F es estrictamente creciente en $(0, 1]$ y estrictamente decreciente en $[-1, 0)$. Obsérvese que esto confirma, además, que en 0 tenemos, efectivamente, un mínimo local estricto.
Con la información que conocemos de F y teniendo en cuenta que $F(0) = 0$, el aspecto de la función es el siguiente:


-1
1