Mat II (GIB) - 17/4/2015 Prueba 1 (EC). 45 puntos (= 45 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 120 minutos**

TEST. (10 puntos) Tiempo 30 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.25** En blanco 0.

	SI	NO	
1.		x	$\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\} \cap \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$.
2.		x	Todo subconjunto no vacio de reales tiene un único supremo.
3.		x	Si a, b son irracionales, entonces ab es irracional.
4.	x		Si los conjuntos $A_1, \ldots, A_n, n \in \mathbb{Z}^+$ son numerables, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} A_n$ es numerable.
5.		x	Las soluciones reales de la ecuación $\left|2 - x^2\right| = 1$ son $x = \pm 1$.
6.		x	El conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ contiene todos sus puntos de acumulación.
7.	x		Si $f, g \in C^1[a, b]$, son tales que $f(a) = g(a) \wedge \forall x \in (a, b),\ f'(x) < g'(x)$. Entonces, $f(b) < g(b)$.
8.	x		La función $\tanh x$ puede escribirse en la forma $\frac{1-e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^2}$.
9.		x	Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo local en x_0, entonces $f''(x_0) > 0$.
10.		x	Si $f'(x) < 0$ para todo x de su dominio, entonces f es invertible.

Mat II (GIB) - 17/4/2015 **Prueba 1 (EC) Problemas. (35 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 90 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja.

1. **(35 puntos)**

   a) **(5 puntos)** Obtenga un valor aproximado de $\operatorname{sen}(\frac{1}{2})$ mediante un polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x_0 = 0$. Estime el error que se comete. Sugerencia: utilice el resto en forma de Lagrange.

   b) **(5 puntos)** Demuestre, sin emplear la regla de L'Hôpital, que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, o lo que es lo mismo, que $\operatorname{sen} x \sim x, x \to 0$. Sugerencia: utilice un polinomio de Taylor adecuado. NOTA: Obviamente NO puede utilizarse la equivalencia $\operatorname{sen} x \sim x, x \to 0$ para el cálculo directo del límite, pues ello equivale a lo que se desea demostrar.

   c) **(5 puntos)** Si $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, construya una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en todo $\mathbb{R}$ y tal que $\forall x \neq 0,\ F(x) = f(x)$.

   d) **(5 puntos)** Estudie la continuidad y diferenciabilidad en su dominio de la función

$$h(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x F(t)dt}{\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt.}$$

   e) **(5 puntos)** Construya una función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en todo $\mathbb{R}$ y tal que $\forall x \neq 0,\ H(x) = h(x)$.

   f) **(10 puntos)** Dada la función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$, si $x = 1, 2$ y cero en el resto, demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que

$$U(P_\varepsilon; f) - L(P_\varepsilon; f) < \varepsilon,$$

   demostrando así que la función f dada es integrable. Demuestre que $\int_0^3 f = 0$.

SOLUCION:

a) El polinomio de Taylor de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ centrado en x_0, para una función f, suficientemente suave, es $P_n(x_0; x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. Puesto que la función sen es impar, los coeficientes de orden par se anulan por lo que el polinomio de Taylor de grado 3 pedido es $P_3(0; x) = x - \frac{1}{3!}x^3$ y el valor aproximado pedido será

$$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}) \approx P_3(0; 1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}.$$

El resto de orden n centrado en x_0 y en la forma de Lagrange para la función f es $R_n(x_0; x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$, con ξ entre x y x_0. En nuestro caso, puesto que el grado 3 corresponde al orden 4, pues dicho coeficiente se anula, para $x_0 = 0, x = \frac{1}{2}$ tendremos $R_4(0; \frac{1}{2}) = \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{5!}(\frac{1}{2})^5$. Se pide estimar $\left|R_4(0; \frac{1}{2})\right|$, es decir:

$$\left|R_4(0; \tfrac{1}{2})\right| = \left|\tfrac{\operatorname{sen}(\xi)}{5!}(\tfrac{1}{2})^5\right| \leq \frac{1}{3840}.$$

b) Podemos seguir dos caminos para la resolución: *i)* calcular el límite, o *ii)* mostrar que son equivalentes cuando $x \to 0$.

i) Emplearemos un polinomio de Taylor centrado en cero para la función sen. Puesto que hemos de comparar con x bastará con tomar $\operatorname{sen} x = x + R_2(0; x)$ donde $R_2(0; x) = \frac{-\cos(\xi)}{3!}x^3$ con ξ entre 0 y x. También podemos escribir en notación de Landau: $\operatorname{sen} x = x + o(x^3)$. Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + R_2(0; x)}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{R_2(0; x)}{x} = 1,$$

ya que $\lim_{x\to 0} \frac{R_2(0;x)}{x} = 0$. Equivalentemente podríamos haber razonado así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + o(x^2)) = 1.$$

ii) $f(x) \sim g(x), x \to a$ si existe $\gamma(x)$ tal que $\gamma(x) \to 1, x \to a$ y $f(x) = \gamma(x)g(x)$, localmente en a. Pero $\gamma(x) \to 1, x \to a$ equivale a $\gamma(x) - 1 \to 0, x \to a$, o lo que lo mismo $\gamma(x) = 1 + o(1), x \to a$. Entonces, $f(x) \sim g(x), x \to a$ si y sólo si $f(x) = (1 + o(1))g(x) = g(x) + o(g(x)), x \to a$. En nuestro caso tenemos:

$$\operatorname{sen} x = x + o(x^3) = x + o(x), x \to 0,$$

ya que $f(x) = o(x^3), x \to a$ implica $f(x) = o(x), x \to a$, como fácilmente se comprueba. Así, se concluye que $\operatorname{sen} x \sim x, x \to 0$.

c) Puesto que la función f es continua en su dominio, $\mathbb{R} - \{0\}$, por ser cociente de funciones continuas de las que el denominador no se anula, la función F, que concide con f ahí, también será continua en ese conjunto. Como 0 es un punto de acumulación de $\mathbb{R}$, para que la función F sea continua en 0 deberá ocurrir que $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = F(0)$. Puesto que, como se ha visto en el apartado anterior, este límite vale 1, la función pedida es:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

d) Tanto la función F como la función e^{-x^2} son continuas en $\mathbb{R}$, por tanto, por el TFC, las funciones numerador y denominador de h son diferenciables en $\mathbb{R}$ y sus funciones derivada son F y e^{-x^2}, respectivamente. Por tanto la funcion h es diferenciable, y por tanto continua, en su dominio, que en este caso es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que el denominador sólo se hace cero para $x = 0$, pues la función integrando es siempre positiva.

e) Puesto que H coincide con h en $\mathbb{R} - \{0\}$ y h es continua ahí, H también lo será en ese conjunto. Como 0 es un punto de acumulación de $\mathbb{R}$, de nuevo necesitaremos para la continuidad de H en $x = 0$ que $\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = H(0)$. Calculemos $\lim_{x\to 0} h(x)$. Puesto que se verifican las hipótesis de la regla de L'Hôpital, tendremos, gracias al TFC:

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x F(t)dt}{\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{e^{-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{e^{-x^2}} = 1.$$

Por tanto, la función pedida es:

$$H(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f) Sea $P_\delta = \{0, 1-\delta, 1+\delta, 2-\delta, 2+\delta, 3\}$. Entonces, $U(P_\delta; f) = 0 + 1\cdot 2\delta + 0 + 1\cdot 2\delta + 0 = 4\delta$ mientras que $L(P_\delta; f) = 0$. Por tanto $U(P_\delta; f) - L(P_\delta; f) = 4\delta$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, tomando un δ tal que $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, se tendrá, eligiendo $P_\varepsilon = P_\delta$ que

$$U(P_\varepsilon; f) - L(P_\varepsilon; f) = 4\delta < 4\,\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

y, por tanto, la función f dada es integrable, como se quería probar. Por otro lado, puesto que para toda partición P se verifica que $L(P; f) \leq \int_0^3 f \leq U(P; f)$, tendremos que para todo $\varepsilon > 0, L(P_\varepsilon; f) \leq \int_0^3 f \leq U(P_\varepsilon; f)$ y por tanto,

$$\forall\varepsilon > 0, 0 \leq \int_0^3 f \leq 4\delta < \varepsilon,$$

lo que implica

$$\int_0^3 f = 0.$$