Mat II (GIB) - 9/4/2014 Prueba 1 (EC). 45 puntos (= 45 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....

DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 120 minutos**

TEST. (10 puntos) Tiempo 30 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.25** En blanco 0.

	SI	**NO**	
1.		x	Si $A \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ y $s = \sup A$, entonces $s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
2.	x		Si a es racional y no nulo, y b es irracional, entonces $\frac{a}{b}$ es irracional.
3.		x	Si A y B son no numerables, entonces $A \cap B$ es no numerable.
4.		x	La desigualdad $\lvert x\rvert > \min\{x, -x\}$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.
5.	x		$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
6.		x	El número $2,02002000200002\ldots$ es racional.
7.		x	Si $A \subset \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ entonces o bien A es abierto, o bien A es cerrado.
8.		x	Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que $\lim_{x\to 0} \lvert f(x)\rvert = 1$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$.
9.	x		Si $x = \operatorname{senh} t$, entonces $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.
10.		x	Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Mat II (GIB) - 9/4/2014 **Prueba 1 (EC) Problemas. (35 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 90 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja.

1. **(15 puntos)**

   a) **(5 puntos)** Demuestre por inducción que la derivada n–ésima de la función $\operatorname{sen} x$ es la función $\operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

   b) **(5 puntos)** Escriba la función $\operatorname{sen} x$ como un polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$, de orden 6, más un término de error en forma de Peano.

   c) **(5 puntos)** Estime $\operatorname{sen}(1)$ con un error menor que 10^{-2} mediante un polinomio de Taylor centrado en $x = 0$ y del menor orden posible. (Sugerencia: utilice el resto en forma de Lagrange)

SOLUCION:

a) Para $n = 1$ es claro que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$. Por otro lado, suponiendo como hipótesis de inducción que es cierto que $(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})$ tendremos que: $(\operatorname{sen} x)^{(n+1)} = ((\operatorname{sen} x)^{(n)})' = \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2})' = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$.

b) El polinomio de Taylor de orden $n \in \mathbb{Z}^+$ centrado en x_0, para una función f, suficientemente suave, es $P_n(x_0; x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. El correspondiente resto en forma de Peano es $o(x - x_0)^n$. Si además $f^{(k+1)}(x)$ es localmente acotada en x_0, entonces se puede escribir el error como $O(x - x_0)^{n+1}$.
En el caso pedido, de la función $\operatorname{sen} x$, es claro a partir del apartado *a*) que todas la derivadas son acotadas y que las derivadas de orden par se anulan en $x_0 = 0$, ya que $\operatorname{sen}(2k\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0$. Por tanto, podemos escribir:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6),$$

o bien,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7).$$

c) El resto de orden n centrado en x_0 y en la forma de Lagrange para la función f es $R_n(x_0; x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$, con ξ entre x y x_0. En nuestro caso, en el que $x_0 = 0, x = 1$ tendremos $R_n(0;1) = \frac{\operatorname{sen}(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}$. Queremos $|R_n(0;1)| < \frac{1}{100}$, es decir:

$$|R_n(0;1)| = \left|\tfrac{\operatorname{sen}(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}\right| \le \left|\tfrac{1}{(n+1)!}\right| < \frac{1}{100},$$

lo cual implica $n \geq 4$. Así:

$$\operatorname{sen}(1) \approx 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

---

2. **(15 puntos)** Sea la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^x - 1}.$$

   a) **(5 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad en su dominio.

   b) **(5 puntos)** ¿Es posible extender la función f a otra F tal que ésta sea continua en todo $\mathbb{R}$? Si lo es, hágalo.

c) **(5 puntos)** La nueva función F, ¿es derivable en $\mathbb{R}$? .

SOLUCION:

a) Se trata de un cociente de funciones, estando el numerador definido en $\mathbb{R}-\{0\}$ y el denominador en todo $\mathbb{R}$. Por tanto el dominio maximal D es $\mathbb{R}-\{0\}$. En este dominio D, ambas funciones, numerador y denominador, son continuas por tratarse de sumas y productos de funciones continuas, y el denominador es no nulo. Por tanto, la función f es continua en su dominio. Mediante razonamientos análogos podemos llegar a la conclusión de que f es derivable en su dominio D.

b) Dado que $x=0$ es punto de acumulación de D, aunque $0\notin D$, nos podemos preguntar acerca de la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{e^x-1}\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})=0,$$

ya que $\operatorname{sen}(x)\sim x$ y $e^x-1\sim x$ cuando $x\to 0$ y $\left|\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\right|\le 1$, y en la expresión anterior sólo aparecen productos. Obsérvese que no es posible aplicar directamente el teorema de L'Hôpital para calcular este límite, puesto que la derivada del numerador,

$$\left(\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})\right)'=2\operatorname{sen}x\cos x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})-\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})\operatorname{sen}^2 x,$$

no tiene límite cuando $x\to 0$.

Por tanto la función

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$ y extiende a f.

c) Puesto que F coincide con f en $\mathbb{R}-\{0\}$, resta estudiar qué ocurre en $x=0$. Aquí, el límite del cociente incremental

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(h)\operatorname{sen}(\frac{1}{h})}{h(e^h-1)},$$

no existe, y por tanto, F no es derivable en $x=0$ y por ende tampoco lo es en $\mathbb{R}$.

---

3. **(5 puntos)** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $x\mapsto f(x)=|x|$.

a) **(2.5 puntos)** Demuestre mediante la definición ϵ - δ que f es continua en $x=0$.

b) **(2.5 puntos)** Demuestre que f no es derivable en $x=0$.

SOLUCION:

a) Sea $\epsilon>0$. Entonces $|f(x)-f(0)|=||x|-0|=|x|$. Por tanto, si tomamos $\delta=\epsilon$ tendremos que

$$|x-0|=|x|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|=|x|<\epsilon,$$

por lo que f es continua en $x=0$.

b) Estudiemos el cociente incremental en $x=0$, esto es:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases} 1 & \text{si } h>0 \text{ y}\\ -1 & \text{si } h<0,\end{cases}$$

por lo que el límite no existe y, por tanto, f no es derivable en $x=0$.
