Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 120 minutos**

TEST. (20 puntos) Tiempo 60 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.25** En blanco 0.

	SI	**NO**	
1.		x	Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$, entonces, $\max A = \sqrt{2}$.
2.	x		Si los conjuntos A y B son numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.
3.		x	Si $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
4.		x	Si $a = 0{,}10100100010001\ldots$, entonces $a \in \mathbb{Q}$.
5.		x	La desigualdad en $\mathbb{R}$, $\left\lvert\dfrac{x+1}{2x-1}\right\rvert > \frac{1}{2}$, se cumple si y sólo si $x > \frac{1}{2}$.
6.	x		Si $f : S \to T$ es inyectiva, entonces la función $g : S \to f(S), x \mapsto g(x) = f(x)$ es invertible.
7.		x	$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left([-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]\right) = \emptyset$.
8.	x		Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$. Entonces $\forall \delta > 0, B(0;\delta) \cap A \neq \emptyset$.
9.	x		Si $\{a_n\}$ es monótona y acotada, entonces cualquier $\{a_{n_k}\}$ es convergente.
10.	x		Si $\{a_n\}$ es fundamental, entonces es acotada.
11.	x		Si $f \in C[a,b]$, con $a < b$, entonces necesariamente la imagen $f([a,b])$ es un intervalo cerrado.
12.		x	Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(x) = a$ si $x = 0$, es continua.
13.		x	Si $f \in C[a,b]$ y derivable en (a,b), con $a < b$, entonces $\exists x_0 \in (a,b)$, único, tal que $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.
14.		x	Sean $A = (0,1) \cup (2,3)$ y la función $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A,\ f'(x) = 0$. Entonces f es constante en A.
15.		x	Si la función $f + g$ es derivable en $a \in \mathbb{R}$, entonces las funciones f y g son derivables en $a \in \mathbb{R}$.
16.	x		Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x^2$ si $x < 0$. Entonces $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\lvert x\rvert$.
17.	x		La función $\tanh x$ puese escribirse en la forma $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
18.		x	Una serie $\sum(a_n + b_n)$ es convergente si y sólo si las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes.
19.	x		La suma inferior de la función $\operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$ para la partición $P = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ vale $-\pi$.
20.		x	Si $p > 1$ entonces $\int_0^3 \frac{1}{x^p} dx$ es convergente.

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 30 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.

1. **(5 puntos)** Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$.

   SOLUCION:

   Primero observamos que se trata de una serie de términos positivos. Por tanto, podemos aplicar directamente el criterio de D'Alambert:

   $$\left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\right) \Big/ \left(\frac{2^n n!}{n^n}\right) = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to \frac{2}{e}, n \to \infty.$$

   Y como $\frac{2}{e} < 1$ la serie converge.

   El criterio raíz de Cauchy también se puede usar, empleando para ello la fórmula de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$.

---

2. **(5 puntos)** Sea $f(x) = \int_0^x (t^2+1)e^t dt, x \in [-a,a]; a > 0$. Razone si es posible o no calcular su polinomio de Taylor de orden 3 centrado en x = 0 y, en caso afirmativo, hállelo.

   SOLUCION:

   Dado que el integrando es $C^\infty[-a,a]$, por el Teorema Fundamental de Cálculo, $f(x)$ también lo será y tendrá polinomio de Taylor de cualquier grado centrado en $x = 0$. En particular, puesto que $f(0) = 0$, $f'(x)\mid_{x=0} = (x^2+1)\, e^x \mid_{x=0} = 1$, $f''(x)\mid_{x=0} = (x^2+2x+1)\, e^x \mid_{x=0} = 1$ y $f'''(x)\mid_{x=0} = (x^2+4x+3)\, e^x \mid_{x=0} = 3$, el polinomio pedido será: $P_3(0;x) = x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2}$.

---

3. Calcule **(5 puntos)** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

   SOLUCION:

   Puesto que $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5), x \to 0$ y $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), x \to 0$, tendremos:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + O(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\tfrac{1}{2} + O(x^2)\right) = \frac{1}{2}.$$

   Obviamente, el mismo resultado se alcanza después de aplicar repetidamente la regla de L'Hôpital.

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 30 minutos**

Elija uno.

Por favor, comience su respuesta en esta hoja.

A. **(10 puntos)** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x$. (sugerencia: recuerde que $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2), x\to 0$).

SOLUCION:

Se nos pide el límite $\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x, x\to+\infty$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\left[\tfrac{1}{e^2}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\right]^x &= \exp\left(x\ln\left[\tfrac{1}{e}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\right]\right)=\exp\left(x\ln\left[\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\right]-x\ln e\right)=\\
&= \exp\left(x^2\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)-x\right), x\to+\infty=\\
&= \exp\left(x^2\left[\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{2x^2}+o\left(\tfrac{1}{x^2}\right)\right]-x\right), x\to+\infty=\\
&= \exp\left(-\tfrac{1}{2}+o(1)\right), x\to+\infty=\\
&= e^{-\frac{1}{2}}, x\to+\infty.
\end{aligned}$$

B. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $x\mapsto f(x)=|x|$.

a) **(5 puntos)** Demuestre mediante la definición que f es continua en $x=0$.

b) **(5 puntos)** Demuestre que f no es derivable en $x=0$.

SOLUCION:

a) Sea $\epsilon>0$. Entonces $|f(x)-f(0)|=||x|-0|=|x|$. Por tanto, si tomamos $\delta=\epsilon$ tendremos que

$$|x-0|=|x|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|=|x|<\epsilon,$$

por lo que f es continua en $x=0$.

b) Estudiemos el cociente incremental en $x=0$, esto es:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 & \text{si } h>0 \text{ y}\\ -1 & \text{si } h<0,\end{cases}$$

por lo que el límite no existe y, por tanto, f no es derivable en $x=0$.

C. Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo y considere $\sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{sen} a)^k$.

a) **(5 puntos)**¿Para qué valores de a converge la serie?

b) **(5 puntos)**Para estos valores, calcule su suma (en función de a).

SOLUCION:

a) Puesto que se trata de una serie geométrica de razón $q = \operatorname{sen} a$, la serie convergerá si y sólo si $|q| < 1$, es decir, si y sólo si $|\operatorname{sen} a| < 1$, es decir si $a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

También podemos ver fácilmente, a partir del criterio de D'Alambert que $\dfrac{|\operatorname{sen} a|^{k+1}}{|\operatorname{sen} a|^k} = |\operatorname{sen} a| < 1$ siempre que $a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$, y llegamos a la misma conclusión que antes, pues al ser absolutamente convergente, también es convergente.

b) Obviamente, si $a = 0$, la suma vale 0. Por otro lado, puesto que la suma de los N primeros términos de una progersión geométrica de razón $q \neq 0$ vale $\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, entonces, con $0 < |q| < 1$ tendremos $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$ y, por tanto, para $a \neq 0 \wedge a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ tendremos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{sen} a)^k = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} a}.$$