MATEMÁTICAS 2 – Prueba 1 (2011-12) 29 de febrero de 2012

Apellidos. . . . . .
Nombre. . . . . *DNI* . . . . . *Grupo* . . . . . .

Nota (1 decimal)

Esta prueba supondrá **1,5 puntos** de la calificación final de los alumnos de evaluación continua.

Consta de un test (**0.3 puntos**), una pregunta de respuesta corta (**0.2 puntos**) y un ejercicio (**1 punto**).

TEST (0.3 PUNTOS)

- El test consta de **3 preguntas**. Marque con una cruz a lo sumo una opción por pregunta.
- **Acierto +0,1 Error −0,04 Blanco 0.**

V	F	
X		**1.** La inecuación real $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$ se verifica si y sólo si $x \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$.
	X	**2.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x^2)} = 0$.
	X	**3.** Si una función f alcanza un mínimo relativo en el punto a, entonces la función es derivable en a y su derivada es $f'(a) = 0$.

PREGUNTA DE RESPUESTA CORTA (0,2 PUNTOS)

- **Acierto +0,2 Error 0 Blanco 0.**

¿Cuál es el grado del polinomio de Taylor mínimo que se necesita para aproximar el número e con un error menor que 0,1? (Indicación: $2{,}4 < e < 3$) **3**

EJERCICIO (1 PUNTO)

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si} \quad x < -2, \\ 2-(x+2)^2, & \text{si} \quad -2 \leq x < -1, \\ |x|, & \text{si} \quad -1 \leq x. \end{cases}$$

a) [0,2 puntos] Estudie si f es continua en $\mathbb{R}$.

b) [0,2 puntos] Estudie si f derivable en $\mathbb{R}$.

d) [0,6 puntos] Estudie los máximos y mínimos relativos y absolutos de f en $\mathbb{R}$.

a) Estudie si f es continua en $\mathbb{R}$.

La función f es una función definida a trozos, que es continua en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$ y $(-1,\infty)$, por ser, en el primer caso, la función exponencial (continua en todo su dominio), en el segundo una función polinómica, y en el último la función valor absoluto (continuas también en todo su dominio).

Sólo nos queda estudiar la continuidad en los extremos de los intervalos, es decir, en $x=-2$ y en $x=-1$. Para esto estudiamos si la función tiene límite en esos puntos, a través de los límites laterales, y vemos si el límite, caso de que exista, es igual al valor de la función en el punto.

Estudiamos los límites laterales en $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} e^x = e^{-2}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} 2-(x+2)^2 = 2$$

Los límites laterales en $x=-2$ son distintos, luego no existe el límite, y la función no es continua en $x=-2$.

Estudiamos ahora los límites laterales en $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 2-(x+2)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} |x| = 1$$

Luego el $\lim\limits_{x\to -1} = 1 = f(-1)$. Por tanto, $f(x)$ es continua en $x=-1$.

Entonces $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-2\}$.

b) Estudie si f derivable en $\mathbb{R}$.

En el intervalo $(-\infty,-2)$, $f(x)=e^x$, que es derivable en todo su dominio, en el intervalo $(-2,-1)$, $f(x)=2-(x+2)^2$, que es derivable en todo su dominio, y en el intervalo $(-1,\infty)$, $f(x)=|x|$, que es derivable en todo su dominio excepto en $x=0$. Por tanto $f(x)$ no es derivable en $x=0$, ni en $x=-2$ por no ser continua, y nos queda por estudiar cuando $x=-1$. Para ello estudiamos las derivadas laterales en $x=1$:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2-(x+2)^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-x^2-4x-3}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-(x+1)(x+3)}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to -1^-} -(x+3) = -2$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{|x|-1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x-1}{x+1} = -1$$

Las derivadas laterales de $f(x)$ son distintas en $x=-1$, luego $f(x)$ no es derivable en $x=-1$

Entonces $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{-2,-1,0\}$.

d) Estudie los máximos y mínimos relativos y absolutos de f en $\mathbb{R}$.

Los candidatos a extremos son los puntos donde la función no es derivable $(-2, -1, 0)$, los extremos del dominio de definición (en este caso no hay) y los puntos donde se anule la primera derivada (tampoco hay).

Estudiamos los tres candidatos a extremos:

- $x = -2$
  En x=-2 hay un salto positivo de e^{-2} a $f(-2) = 2$; además, la derivada es negativa cuando nos alejamos de $x = -2$ por la derecha ($f'(x) = -2x - 4$, si $-2 < x < -1$), por lo que tenemos un máximo relativo en $x = -2$.
- $x = -1$
  La primera derivada es negativa cuando nos acercamos a $x = -1$ por la izquierda ($f'(x) = -2x-4$, si $-2 < x < -1$), y sigue siendo negativa cuando nos alejamos de $x = -1$ por la derecha ($f'(x) = -1$, si $-1 < x < 0$). Luego en $x = -1$ la función $f(x)$ no alcanza extremo.
- $x = 0$
  La primera derivada es negativa cuando nos acercamos a $x = 0$ por la izquierda ($f'(x) = -1$, si $-1 < x < 0$), y es positiva cuando nos alejamos de $x = 0$ por la derecha ($f'(x) = 1$, si $0 < x$). Luego en $x = 0$ tenemos un mínimo relativo.

Estudiamos si alguno de los extremos puede ser absoluto. Para ello estudiamos los límites de $f(x)$ en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} |x| = \infty$$

Además $f(x)$ no toma valores negativos en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Luego tenemos un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo absoluto en $x = 0$.