Ejercicio 1 Modelos estándar y espacios probabilístico (11 Punkte)

Dada sea una secuencia de Bits $[X_1, \ldots, X_8]$ constituida por elementos independientes por pares, distribuidos idénticamente, que deben ser modelados por variables aleatorias (distribución de Brenoulli) con parametros $1/2 < p < 1$. Sea $A = \{[X_1, \ldots, X_8] = [1,1,0,1,1,1,1,1]\}$ y $B = \{[X_1, \ldots, X_8] = [1,1,1,1,1,1,1,1]\}$.

0 1 2 3

a)* Determine $\mathsf{P}(A)$ y $\mathsf{P}(B)$.

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\{X_1 = 1\})\,\mathsf{P}(\{X_2 = 1\})\,\mathsf{P}(\{X_3 = 0\})\,\mathsf{P}(\{X_4 = 1\})\,\mathsf{P}(\{X_5 = 1\})\,\mathsf{P}(\{X_6 = 1\})\cdot$
$\mathsf{P}(\{X_7 = 1\})\,\mathsf{P}(\{X_8 = 1\})$ ✓ $= p^7(1-p)^1$ ✓ $= p^7(1-p)$

$\mathsf{P}(B) = \prod_{i=1}^{8} \mathsf{P}(\{X_i = 1\}) = p^8$ ✓

0 1

b)* ¿Qué combinación tiene la probabilidad más alta?

$[1,1,1,1,1,1,1,1]$

Sea $Y = \sum_{k=1}^{8} X_k$, $C = \{Y = 7\}$ y $D = \{Y = 8\}$.

0 1

c)* ¿Que declaración puede usted tomar con la información dada? ?

- [x] $\mathsf{P}(A) < \mathsf{P}(C)$
- [ ] $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(C)$
- [ ] $\mathsf{P}(A) > \mathsf{P}(C)$
- [ ] keine Aussage möglich

0 1

d)* ¿Que declaración puede usted tomar con la información dada?

- [ ] $\mathsf{P}(B) < \mathsf{P}(D)$
- [x] $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(D)$
- [ ] $\mathsf{P}(B) > \mathsf{P}(D)$
- [ ] keine Aussage möglich

0 1 2 3

e)* Determine la probabilidad $\mathsf{P}(C)$ dependiendo de p.

Indicación: Considere que modelo estándar es adecuado para Y y que valores deberían adoptar sus parámetros.

Distribución binomial con parámetros p y n = 8. ✓

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\{Y = 7\}) = p_Y(7) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{8}{7} p^7 (1-p)^1 \quad ✓$$

$$= \frac{8!}{7! \cdot 1!} p^7 (1-p) = 8p^7(1-p) \quad ✓$$

f) Compare los valores P (C) y P (D) dado el valor p = 7/8.

0
1
2

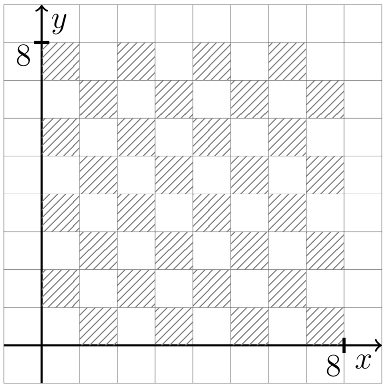
$\mathsf{P}(C) = 8\frac{7^7}{8^7}\frac{1}{8}$ und $\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(B) = \frac{7^8}{8^8}$ $\surd$

$\mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(D) = \underbrace{(8-7)}_{>0}\frac{7^7}{8^8} > 0$ (oder $\frac{\mathsf{P}(C)}{\mathsf{P}(D)} = \frac{8}{7} > 1$) $\Rightarrow \mathsf{P}(C) > \mathsf{P}(D)$ $\surd$

Ejercicio 2 **Distribuciones multidimensionales** (10 Punkte)

Dadas sean dos variables aleatórias colectivas continuas X e Y con la función de densidad de probabilidad (PDF) compuesta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{cuando } (x,y) \text{ toman los valores respresentados por superficies sombreadas} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

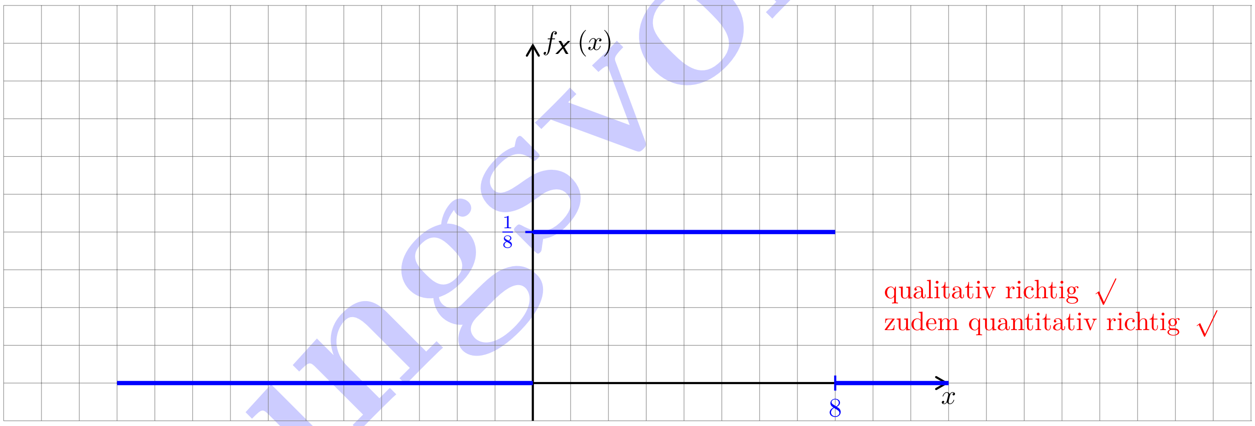


0 1

a) ¿Qué valor debe tomar c? $\frac{1}{32}$

0 1 2

b)* Dibuje cuantitativamente la PDF f_X (x)para todo x ∈ ℝ.



0 1

c)* Qué relación existe entre f_X y f_Y?

$f_X(\xi) = f_Y(\xi)$ √ $\forall \xi \in \mathbb{R}$ (Flächenanordnung symmetrisch bzgl. Vertauschung von x und y)

0 1 2 3

d) Sean X' y Y' dos variables aleatorias independientes entre ellas y continuas con las misma distribución en las fronteras como X e Y. De $f_{X',Y'}(x,y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$f_{X',Y'}(x,y) = f_{X'}(x)\, f_{Y'}(y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \surd \quad = \begin{cases} \frac{1}{64} & \text{wenn } x \in [0;8] \text{ und } y \in [0;8] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

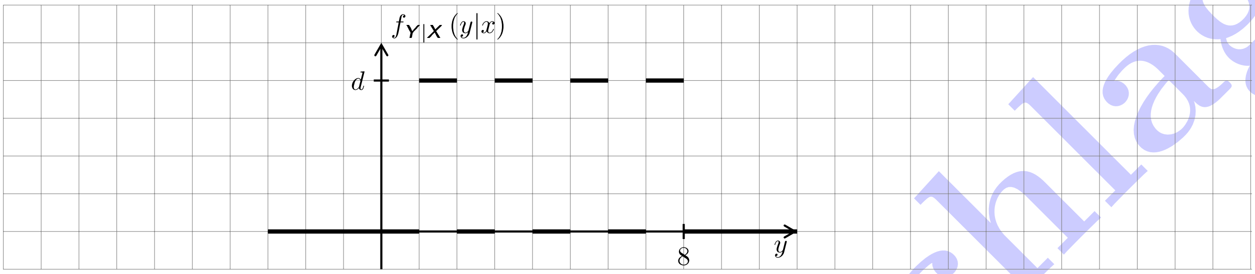
√ √

Von nun an werden wieder die beiden **ursprünglich gegebenen** Zufallsvariablen X und Y betrachtet.

e)* Für welche Werte von x ist $f_{Y|X}(y|x)$ nicht definiert?

$x \notin [0;8]$ √

f)* Für welche Werte von x ist $f_{Y|X}(y|x)$ wie in der folgenden Abbildung gezeigt?



$x \in [0;1] \cup [2;3] \cup [4;5] \cup [6;7]$ √

g)* Dabei muss gelten: $d = \boxed{\frac{1}{4}}$

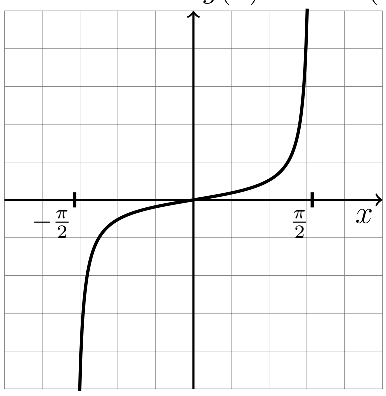
Aufgabe 3 Transformation von Zufallsvariablen (11 Punkte)

Gegeben seien die Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{wenn } x \in [-a; a], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $0 < a < \frac{\pi}{2}$, sowie die Funktion

$g(x) = b\tan(x)$



mit $b > 0$. Wir betrachten die Zufallsvariable $Y = g(X)$.

Hinweis: Sie können $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$ oder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ verwenden.

0 1 2 3 4 5

a)* Berechnen Sie $f_Y(y)$. Beachten Sie die notwendige Fallunterscheidung im Endergebnis.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=g^{-1}(y)}\right|} \\ &= \frac{f_X\left(\arctan\left(\frac{y}{b}\right)\right)}{\left|b(1+\tan^2(x))\big|_{x=g^{-1}(y)}\right|} \\ &= \frac{f_X\left(\arctan\left(\frac{y}{b}\right)\right)}{\left|b\left(1+\tan^2\left(\arctan\left(\frac{y}{b}\right)\right)\right)\right|} \\ &= \frac{f_X\left(\arctan\left(\frac{y}{b}\right)\right)}{b\left(1+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2ab\left(1+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right)} & \text{wenn } y \in [-b\tan(a); b\tan(a)], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Von nun an sei $b = 1$, so dass sich

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2a(1+y^2)} & \text{wenn } y \in [-\tan(a); \tan(a)], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt.

b)* Untersuchen Sie $f_Y(y)$ auf Symmetrieeigenschaften. Was folgt für den Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$? 0 1 2

$f_Y(y)$ ist eine gerade (achsensymmetrische) Funktion, weil sie nur von y^2 abhängt $\checkmark$
$\Rightarrow \mathrm{E}[Y] = 0$ $\checkmark$

Nun werde der Grenzfall $a \to \frac{\pi}{2}$ betrachtet.

c)* Vereinfachen Sie $f_Y(y)$ für diesen Fall so weit wie möglich. 0 1

$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ $\checkmark$ $\forall y \in \mathbb{R}$

d) Zeigen Sie nachvollziehbar, dass für diesen Fall $\int_{-\infty}^{\infty} |y| f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \infty$ gilt. Was folgt für den Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$? 0 1 2 3
Hinweis: $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + const.$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_Y(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{\pi(1+y^2)}\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y \quad \checkmark \\ &= 2\left[\frac{1}{2\pi}\ln(1+y^2)\right]_0^{\infty} \\ &\overset{\checkmark}{=} \infty - 0 = \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$ existiert nicht. $\checkmark$

Aufgabe 4 **Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (8 Punkte)**

Gegeben seien die Zufallsvariable X mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_X(z)$ und die Zufallsvariable $Y = 2X - 1$.

0 1 2 3

a)* Drücken Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von Y durch G_X aus.

$$G_Y(z) = \mathrm{E}\left[z^Y\right] = \mathrm{E}\left[z^{2X-1}\right] \ \checkmark = \mathrm{E}\left[(z^2)^X \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{z}\,\mathrm{E}\left[(z^2)^X\right] \ \checkmark = \frac{1}{z} G_X\left(z^2\right) \ \checkmark$$

Von nun an sei

$$G_X(z) = \frac{z}{b - bz + z}$$

mit $b > 1$.

0 1 2

b)* Welchen Verteilungstyp hat X und wie ist/sind der/die Parameter der Verteilung gewählt?

$G_X(z) = \frac{\frac{1}{b}z}{1 - z + \frac{1}{b}z}$ entspricht einer geometrischen Verteilung $\checkmark$ mit Parameter $p = \frac{1}{b}$. $\checkmark$

0 1

c) Vereinfachen Sie für diesen Fall $G_Y(z)$ so weit wie möglich.

$$G_Y(z) = \frac{1}{z} \frac{z^2}{b - bz^2 + z^2} = \frac{z}{b - bz^2 + z^2} \ \checkmark$$

Von nun an sei $b = 2$, so dass $G_Y(z) = \frac{z}{2 - z^2}$.

0 1 2

d)* Bestimmen Sie $\mathrm{E}[Y]$. Geben Sie eine Rechnung oder eine sonstige ausführliche Begründung an.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} G_Y(z) = \frac{(2-z^2) - z(-2z)}{(2-z^2)^2} \ \checkmark = \frac{2+z^2}{(2-z^2)^2}$

$\mathrm{E}[Y] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} G_Y(z)\Big|_{z=1} = \frac{2+1}{(2-1)^2} = 3 \ \checkmark$

Alternative Lösung: X ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{E}[X] = 2 \Rightarrow \mathrm{E}[Y] = 2\,\mathrm{E}[X] - 1 = 3$

Aufgabe 5 **Poisson-Prozess (11 Punkte)**

Gegeben sei ein Poisson-Prozess $(V_t : t \geq 0)$ mit Parameter λ.

a)* Bestimmen Sie λ für den Fall, dass der Wert $\mathrm{E}[V_1 V_4] = \frac{1}{2}$ bekannt ist.

$r_V(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$

$\frac{1}{2} = \lambda 1 + \lambda^2 4$ $\checkmark$

$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{2})}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{8} = \frac{-1 \pm 3}{8} = \begin{cases} \frac{2}{8} \\ \frac{-4}{8} \end{cases}$ $\checkmark$

$\lambda = \frac{-4}{8} < 0$ nicht möglich $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ $\checkmark$

Von nun an werde **ein anderer** Poisson-Prozess $(V_t : t \geq 0)$ mit $\lambda = 2$ betrachtet.

b)* Berechnen Sie $\mathsf{P}(\{V_t = 0\})$.

$p_{V_t}(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-(\lambda t)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ $\checkmark$

$\mathsf{P}(\{V_t = 0\}) = p_{V_t}(0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} \mathrm{e}^{-(\lambda t)} = \mathrm{e}^{-2t}$ $\checkmark$

c)* Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathsf{P}(\{V_t \geq 1\})$ und $\mathsf{P}(\{V_t = 0\})$?

$\mathsf{P}(\{V_t \geq 1\}) = 1 - \mathsf{P}(\{V_t = 0\})$ $\checkmark$ (weil $\mathsf{P}(\{0 < V_t < 1\}) = 0$)

d)* Geben Sie $\mathsf{P}(\{V_3 \geq 1\} | \{V_2 \geq 1\})$ an. Welche Eigenschaft des Poisson-Prozesses führt zu diesem Ergebnis?

$\mathsf{P}(\{V_3 \geq 1\} | \{V_2 \geq 1\}) = 1$ $\checkmark$ weil der Poisson-Prozess monoton steigende Musterfunktionen hat $\checkmark$

e) Berechnen Sie nun $\mathsf{P}(\{V_2 \geq 1\} | \{V_3 \geq 1\})$.
Hinweis: Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von e.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\{V_2 \geq 1\} | \{V_3 \geq 1\}) &= \frac{\mathsf{P}(\{V_3 \geq 1\} | \{V_2 \geq 1\}) \, \mathsf{P}(\{V_2 \geq 1\})}{\mathsf{P}(\{V_3 \geq 1\})} \checkmark \\ &= \frac{1 \cdot (1 - \mathsf{P}(\{V_2 = 0\}))}{1 - \mathsf{P}(\{V_3 = 0\})} \checkmark \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-2 \cdot 2}}{1 - \mathrm{e}^{-2 \cdot 3}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-4}}{1 - \mathrm{e}^{-6}} \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 6 **Zufallsfolgen (15 Punkte)**

Bei der Übertragung einer Zufallsfolge $(X_k : k \in \mathbb{Z})$ tritt eine Verzögerung um $D \in \mathbb{N}$ Zeitschritte, eine Skalierung mit $h \in \mathbb{R}$ und eine Störung durch additives Rauschen $(Z_k : k \in \mathbb{Z})$ auf. Die empfangene Folge ist $(Y_k : k \in \mathbb{Z})$ mit

$$Y_k = hX_{k-D} + Z_k.$$

Das Rauschen $(Z_k : k \in \mathbb{Z})$ sei stochastisch unabhängig von $(X_k : k \in \mathbb{Z})$.

0 1 2

a)* Drücken Sie die Erwartungswertfolge $\mu_Y(k)$ durch die Erwartungswertfolgen μ_X und μ_Z aus.

$$\mu_Y(k) = \mathrm{E}\left[hX_{k-D} + Z_k\right] = h\,\mathrm{E}\left[X_{k-D}\right] + \mathrm{E}\left[Z_k\right] \;\checkmark = h\mu_X(k-D) + \mu_Z(k) \;\checkmark$$

0 1 2 3 4

b)* Drücken Sie die Autokorrelationsfolge $r_Y(k,\ell)$ durch die Autokorrelationsfolgen r_X und r_Z und die Erwartungswertfolgen μ_X und μ_Z aus.

$$\begin{aligned} r_Y(k,\ell) &= \mathrm{E}\left[Y_k Y_\ell\right] = \mathrm{E}\left[(hX_{k-D} + Z_k)(hX_{\ell-D} + Z_\ell)\right] \;\checkmark \\ &= h^2\,\mathrm{E}\left[X_{k-D}X_{\ell-D}\right] + h\,\mathrm{E}\left[X_{k-D}Z_\ell\right] + h\,\mathrm{E}\left[Z_k X_{\ell-D}\right] + \mathrm{E}\left[Z_k Z_\ell\right] \;\checkmark \\ &= h^2 r_X(k-D,\ell-D) + h\mu_X(k-D)\mu_Z(\ell) + h\mu_X(\ell-D)\mu_Z(k) + r_Z(k,\ell) \;\checkmark\checkmark \end{aligned}$$

0 1 2

c)* Drücken Sie die Kreuzkovarianzfolge $c_{Y,X}(k,\ell) = \mathrm{Cov}\left[Y_k, X_\ell\right]$ durch die Autokovarianzfolgen c_X und c_Z aus.

$$\begin{aligned} c_{Y,X}(k,\ell) &= \mathrm{Cov}\left[Y_k, X_\ell\right] = \mathrm{Cov}\left[(hX_{k-D} + Z_k), X_\ell\right] = h\,\mathrm{Cov}\left[X_{k-D}, X_\ell\right] + \mathrm{Cov}\left[Z_k, X_\ell\right] \;\checkmark \\ &= hc_X(k-D,\ell) + 0 = hc_X(k-D,\ell) \;\checkmark \end{aligned}$$

Von nun an werde angenommen, dass $(X_k : k \in \mathbb{Z})$ und $(Z_k : k \in \mathbb{Z})$ im weiteren Sinne stationär und mittelwertsfrei sind.

d) Zeigen Sie, dass $(Y_k : k \in \mathbb{Z})$ in diesem Fall ebenfalls im weiteren Sinne stationär ist, indem Sie Ihre Ausdrücke für $\mu_Y(k)$ und $r_Y(k,\ell)$ so weit wie möglich vereinfachen.

0 1 2 3

$$\begin{aligned}\mu_Y(k) &= h0 + 0 = 0 = const. \ \checkmark\\ r_Y(k,\ell) &= h^2 r_X(k - D - (\ell - D)) + h\cdot 0\cdot 0 + h\cdot 0\cdot 0 + r_Z(k-\ell)\\ &= h^2 r_X(k-\ell) + r_Z(k-\ell) \ \checkmark\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu_X$ ist konstant und r_X hängt nur von der Differenz $k-\ell$ ab $\Rightarrow$ WSS $\checkmark$

Für eine bestimmte Wahl von h und r_Z, die wir von nun an annehmen, ergibt sich

$$\mu_Y(k) = 0, \qquad r_Y(\tau) = 4r_X(\tau) + \beta\delta(\tau), \qquad c_{Y,X}(k,\ell) = 2r_X(k-\ell-D)$$

wobei δ der Einheitsimpuls ist und $\beta > 0$ eine Konstante ist.

Wir betrachten den Fall $r_X(\tau) = \alpha\lambda^{|\tau|}$ mit den Konstanten $\alpha > 0$ und $\lambda \in]0;1[$.

e)* Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho_{Y_k,X_\ell} = \frac{\mathrm{Cov}[Y_k,X_\ell]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y_k]\,\mathrm{Var}[X_\ell]}}$. Drücken Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von λ, D, der Abkürzung $\tau = k-\ell$ und dem Verhältnis $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ aus.

0 1 2 3 4

$$\begin{aligned}\rho_{Y_k,X_\ell} &= \frac{\mathrm{Cov}[Y_k,X_\ell]}{\sqrt{\mathrm{Var}[Y_k]\,\mathrm{Var}[X_\ell]}}\\ &= \frac{c_{Y,X}(k,\ell)}{\sqrt{r_Y(0)\,r_X(0)}} \ \checkmark \quad (\text{weil } \mu_Y(k) = \mu_X(\ell) = 0)\\ &= \frac{2r_X(k-\ell-D)}{\sqrt{(4r_X(0) + \beta\delta(0))r_X(0)}} = \frac{2\alpha\lambda^{|\tau-D|}\ \checkmark}{\sqrt{(4\alpha+\beta)\alpha}} \ \checkmark\\ &= \frac{2\lambda^{|\tau-D|}}{\sqrt{\left(4+\frac{\beta}{\alpha}\right)}} = \frac{2\lambda^{|\tau-D|}}{\sqrt{(4+\gamma)}} \ \checkmark\end{aligned}$$

Aufgabe 7 Zufallsprozesse und lineare zeitinvariante Systeme (6 Punkte)

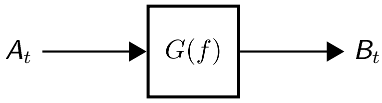
Gegeben sei ein im weiteren Sinne stationärer (WSS), mittelwertsfreier Zufallsprozess $(A_t : t \in \mathbb{R})$ mit dem Leistungsdichtespektrum

$$S_A(f) = \exp(-|f|)$$

und ein lineares zeitinvariantes System mit Übertragungsfunktion

$$G(f) = \begin{cases} 2\exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right) & \text{wenn } |f| \leq 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten den Zufallsprozess $(B_t : t \in \mathbb{R})$ am Ausgang des Systems.



0 1

a)* Begründen Sie ausführlich warum $\sigma_B^2(t)$ eine Konstante ist.

Weil der Ausgang (B_t) eines LTI-Systems mit einem WSS-Prozess am Eingang (A_t) wieder WSS ist, und die Varianzfunktion eines WSS-Prozesses konstant ist. √

0 1 2 3 4 5

b)* Bestimmen Sie σ_B^2. Achten Sie auf eine nachvollziehbare Herleitung.
Hinweis: Schreiben Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von e.

$$\sigma_B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_B(f)\,\mathrm{d}f - (\underbrace{\mu_B}_{=\mu_A \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = 0 \;\checkmark})^2 \;\checkmark$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 S_A(f)\,\mathrm{d}f \;\checkmark$$

$$= \int_{-3}^{3} 4\exp(-|f|)\mathrm{d}f \;\checkmark$$

$$= 2\int_{0}^{3} 4\exp(-f)\mathrm{d}f$$

$$= 8[-\exp(-f)]_0^3$$

$$= 8(1 - \mathrm{e}^{-3}) \;\checkmark$$

Aufgabe 8 Praktikum Stochastische Signale (18 Punkte)

Gegeben sei der folgende MATLAB-Code. Die Einträge von `x` sollen als Realisierungen einer Zufallsvariablen X interpretiert werden, und die Einträge von `y` als Realisierungen einer Zufallsvariablen Y.

```
x=2*randn(2e4,1)-3;
y=exp(x);
A=mean(x);
B=var(x);
C=mean(x>-3);
D=mean(y>0);
```


a)* Welchen Zahlenwert hat `A` nach Ausführung des Codes ungefähr? 0 1

-3 √

b)* Welchen Zahlenwert hat `B` nach Ausführung des Codes ungefähr? 0 1

4 √

c)* Welche Änderung könnte man vornehmen, damit der Wert von `B` näher am theoretischen Wert liegt? 0 1

mehr Realisierungen √ (den Wert `2e4` im Aufruf von `randn` erhöhen)

d)* Welchen Zahlenwert hat `C` nach Ausführung des Codes? 0 1

- [ ] exakt 0
- [ ] ungefähr 0
- [ ] exakt $\frac{1}{2}$
- [X] ungefähr $\frac{1}{2}$
- [ ] exakt 1
- [ ] ungefähr 1

e)* Welchen Zahlenwert hat `D` nach Ausführung des Codes? 0 1

- [ ] exakt 0
- [ ] ungefähr 0
- [ ] exakt $\frac{1}{2}$
- [ ] ungefähr $\frac{1}{2}$
- [X] exakt 1
- [ ] ungefähr 1

f)* Wie viele Einträge hat `y`? Schreiben Sie Ihre Antwort in üblicher handschriftlicher mathematischer Notation (nicht in MATLAB-Notation). 0 1

$2 \cdot 10^4$ √ $= 20000$

g)* Welchen Verteilungstyp hat Y? 0 1

- [ ] Normalverteilung
- [ ] stetige Gleichverteilung
- [ ] Bernoulli-Verteilung
- [X] keinen der genannten Verteilungstypen

Es sind die folgenden Ausschnitte aus der MATLAB-Hilfe gegeben:

```
P = unifcdf(X,A,B) returns the cdf for the uniform distribution
on the interval [A,B] at the values in X.
```

[...]

```
Y = unifpdf(X,A,B) returns the continuous uniform pdf on the
interval [A,B] at the values in X. By default A = 0 and B = 1.
```

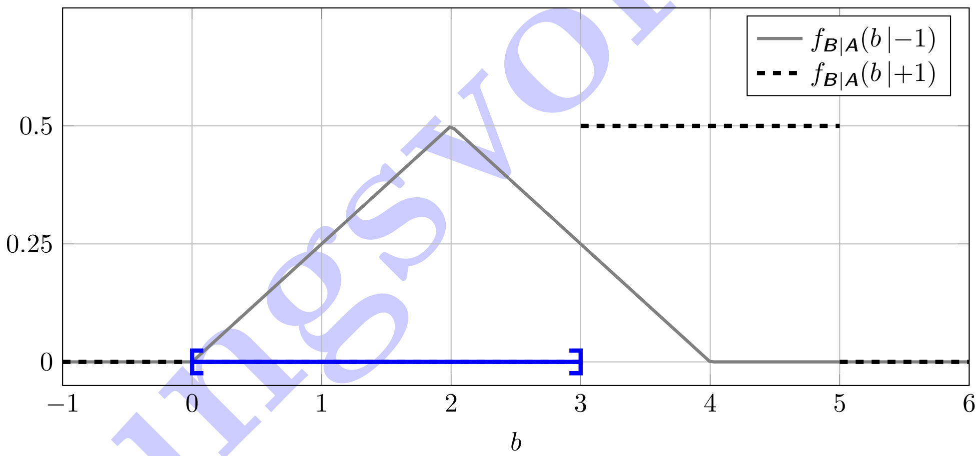
h)* Schreiben Sie eine Codezeile, die die kumulative Verteilungsfunktion einer im Intervall $[5; 10]$ stetig gleichverteilten Zufallsvariablen plottet. Nehmen Sie hierzu an, dass zuvor die Codezeile `z=-15:0.01:15;` ausgeführt wurde.

```
plot(z,unifcdf(z,5,10))
```

i)* Welchen Zahlenwert liefert `unifcdf(0.5,0,1)`?

$\frac{1}{2}$ ✓

Aus einer Beobachtung B soll ein Eingangssignal $A \in \{\pm 1\}$ detektiert werden. Gegeben sei hierzu die folgende bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.



j)* Markieren Sie innerhalb des Intervalls $[0; 5]$ auf der b-Achse alle Werte, bei denen sich ein ML-Detektor für $\hat{a} = -1$ entscheidet.

k)* Warum ist es ausreichend, die Entscheidung des ML-Detektors (siehe vorangegangene Teilaufgabe) nur innerhalb des Intervalls $[0; 5]$ zu diskutieren?

Weil $\mathsf{P}(\{B \notin [0; 5]\}) = 0$. ✓
(Normalerweise müsste in Bereichen mit $f_{B|A}(b\,|+1) = f_{B|A}(b\,|-1)$ die Entscheidungsregel willkürlich festgelegt werden. Dies ist im Bereich außerhalb $[0; 5]$ nicht nötig, da hier $f_{B|A}(b\,|+1) = f_{B|A}(b\,|-1) = 0$.)

l)* Nennen Sie einen Wert von $p_A(-1)$, der dazu führen würde, dass MAP-Detektor und ML-Detektor voneinander unterschiedliche Entscheidungsregeln haben.
Hinweis: Es gibt mehrere mögliche Lösungen.

$p_A(-1) = 1$ ✓ (jeder Wert $> \frac{2}{3}$ ist korrekt)

Gegeben sei nun der folgende MATLAB-Code, der Realisierungen eines Elements X_n einer Zufallsfolge $(X_n : n \in \mathbb{N})$ zu einem bestimmten Zeitpunkt n erzeugt.

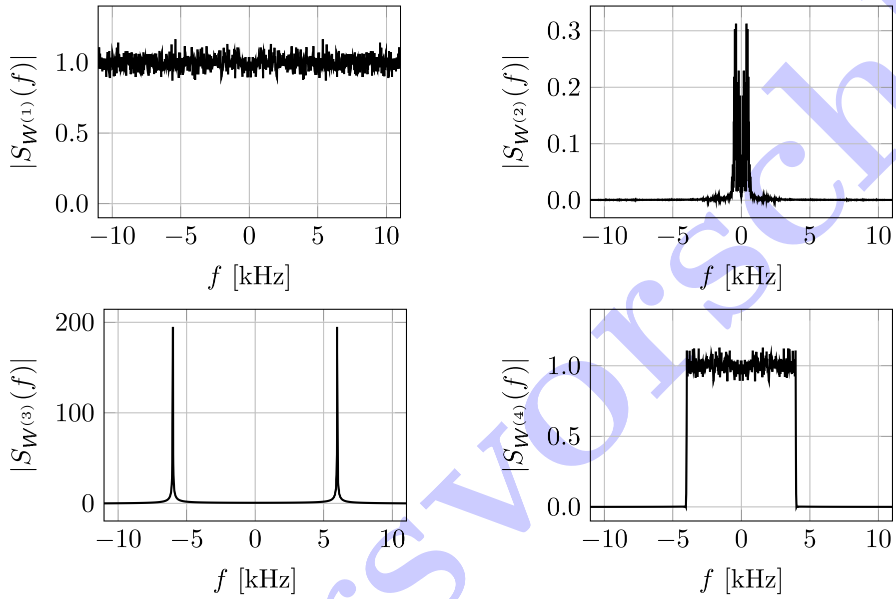
```
x = sum(2*a*sign(rand(b,10*c)-1/d))';
```

Dabei wird angenommen, dass `a`, `b`, `c` und `d` davor auf geeignete Werte gesetzt werden.

m)* Wie müssen `a`, `b`, `c` und `d` gewählt werden, damit der Code 1000 Realisierungen des 20-ten Folgenelements eines symmetrischen Random Walks mit Schrittweite 1 erzeugt?

$a =$ $\frac{1}{2}$ $b =$ 20 $c =$ 100 $d =$ 2

Gegeben seien die geschätzten Leistungsdichtesprektren der Zufallsprozesse $(W_t^{(i)} : t \in \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, 4$.



n)* Sei $(V_t : t \in \mathbb{R})$ die Summe von zwei dieser Zufallsprozesse, d.h. $V_t = W_t^{(i)} + W_t^{(j)}$ mit $j \neq i$. Für welche Kombinationen von $i \in \{1,2,3,4\}$ und $j \in \{1,2,3,4\}$ ist es möglich, $W^{(i)}$ durch Hochpassfilterung von V zurückzuerhalten?

$i = 3$ und $j = 2$ ✓ sowie $i = 3$ und $j = 4$ ✓

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.