MATEMÁTICAS, GRUPO F (2019/2020)

Problemas Tema 7: Integrales en R

1. Sin calcular las primitivas, decir en cada caso cuál es el valor correcto de la integral entre las tres opciones que se ofrecen:

   (i) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8 x dx$: a) $\dfrac{\pi}{4} - 1$, b) $\dfrac{35\pi}{128}$, c) π

   (ii) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^7 x dx$: a) $\dfrac{5\pi}{16}$, b) $\dfrac{\pi}{8}$, c) 0

   (iii) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3 - 8}$: a) $-\dfrac{\log 3}{24} - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{72}$, b) $\log\dfrac{9}{8}$, c) $\dfrac{33}{4}$

2. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Taylor de $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-y^2} dy$ en $x = 0$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-y^2} dy}{\operatorname{sen} x}$.

3. Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3) + 1}{\int_{-1}^{x} \operatorname{sen}(t^3) dt + x + 4}$. Calcular, si existe, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) dx$.

4. ¿Posee función inversa la función f definida para todo $x \geq 2$ por $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$?

5. Sea $f(x) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{4\arctan t} dt$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$. Probar que f posee inversa en todo $\mathbf{R}$.

6. Determinar en qué x del intervalo que se indica alcanzan su máximo y su mínimo las funciones:

   a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x-x^3} \frac{dt}{\sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 t}}$ en $[0, 2]$; b) $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{36 + t^3}}$ en $[-1, 6]$;

7. Sea $F(x) = \displaystyle\int_{1-2x}^{x^2} f(t) dt$, con $f(t)$ continua e impar en su dominio. Demostrar que $F(1) = F'(1) = 0$.

8. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \frac{2\mathrm{e}^s}{1+s} ds - 1$. (a) Hallar $F'(2)$. (b) Estudiar cuántas veces se anula F en el intervalo $[0, 1]$.

9. Sea $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$. Probar que $\displaystyle\int_3^8 f < \frac{5}{3}$.

10. Determinar la ecuación de la recta tangente a $F(x) = \int_{-\pi/2}^{x^2} e^{-t^2} \sin t dt$ en $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. ¿Es la integral $\int_{-\pi/2}^{\pi} e^{-t^2} \sin t dt$ mayor o menor que $\frac{\pi}{2}$?

11. Sea $F(x) = \int_{-1}^{x} t\,[\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{t^4}]\, dt$. Hallar $F'(-1)$ y $F(1)$. Determinar los valores máximo y mínimo de F en $[-1, 1]$, si existen.

12. Sea $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$. Dibujar aproximadamente su gráfica. Hallar el área de la región limitada por los ejes y la gráfica de f.

13. Sea la función $F(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{\log t}{t + t^3}\, dt$ definida en el intervalo $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$
a) Determina en qué valor de x toma la función su valor máximo en el intervalo $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$.
b) ¿Cuántas veces se anula la función en dicho intervalo?
c) Esboza la gráfica de $F(x)$ en $[\frac{1}{2}, \infty)$

14. Sea $\int_{x}^{2x} u^2 e^{-u^2} du$:

a) Determina el signo de la integral según el valor de x.

b) Acota de la mejor forma que puedas $\int_{1}^{2} u^2 e^{-u^2} du$.

c) Halla el valor de x que hace máximo el valor de la integral.

d) Prueba que el máximo valor de la integral es menor que 1/2, es decir, que $\int_{x}^{2x} u^2 e^{-u^2} du < \frac{1}{2}$ para cualquier x real.

15. La capacidad calorífica de un sólido según el modelo de Debye viene dada por

$$C_V = 9NK \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_{0}^{\theta_D/T} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx.$$

Calcula su límite a alta temperatura.

16. Sea $f(x) = \int_{2}^{x^2} s^3 e^{-s} ds$.

a) Hallar los valores x donde f toma sus valores extremos en $[0, 2]$ y probar que el máximo es menor que 7.

b) ¿Alcanza f su máximo en $[0, \infty)$?

c) Precisar cuántas veces se anula f en $\mathbf{R}$.

17. Probar que $\int_{0}^{1} x^2 \cos x^2\, dx \geq \frac{1}{6}$.

18. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\int_{x}^{2x} \sin t^2 dt}{x^3}$.

19. ¿Es la integral $\int_1^4 \arctan(\log x^2)dx$ mayor que 5? ¿Es mayor que $\int_1^4 \arctan(\log x)dx$?

20. Calcular:

    a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos^2 x}{4-\sin^2 x}dx$ b) $\int_0^1 x^2e^{-2x}dx$

    c) $\int_{-1}^0 x^3 \sin x^2 dx$ d) $\int_1^{\sqrt{3}} \log\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$

    e) $\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ f) $\int_{-\log 3}^{-\log 2} \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$

21. Determinar, calculando la primitiva, si convergen o divergen las siguientes integrales impropias y, en caso de que converjan, calcular su valor:

    a) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$ c) $\int_1^e \frac{dx}{x\log x}$ d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4+x^2}$ e) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

22. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen o divergen:

    a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ b) $\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2}dx$ c) $\int_3^\infty \frac{(\log x)^2}{x}dx$ d) $\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}dx$

    e) $\int_0^1 \frac{\sin^3 x}{e^{x^3}-1}dx$ f) $\int_0^{\pi/2} e^{-x}\tan x dx$ g) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ h) $\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{x}(1-e^{-x})}dx$

    i) $\int_0^4 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ j) $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ k) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}dx$ l) $\int_5^\infty \frac{\sqrt{x+4}}{x-5}dx$

23. Precisar si converge la integral $\int_2^\infty \frac{\arctan(2/x)}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}dx$.

24. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x \log(1+2x)$. Precisar si converge la integral $\int_0^1 \frac{e^x \log(1+2x)}{x^2}dx$.

25. Sea $f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2}$. Estudiar si convergen $\int_1^\infty f(x)dx$ y $\int_{-1}^1 f(x)dx$

26. Sea $g(x) = e^{x-x^2}$:

    a) Si $f(x) = \int_{2x}^{2x+1} g(t)dt$, hallar $f'(1/2)$ y estudiar el crecimiento y decrecimiento de f.

    b) Probar que se cumple $0 < f(x) < e^{1/4}$ para todo x.

    c) Estudiar si converge $\int_0^\infty g(x)dx$.