MATEMÁTICAS, GRUPO F (2019/2020)

Problemas Tema 6: Series de funciones y series de Taylor

1. Determinar todos los valores de x para los que convergen las series:

a) $\sum \frac{(7x)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ b) $\sum \frac{x^n}{n^n}$ c) $\sum 2^{n^2}(x-2)^n$ d) $\sum \frac{x^n}{n+\log n}$

e) $\sum \frac{n^2 x^{2n}}{\pi^n}$ f) $\sum \frac{2^n}{\sqrt{n^3+1}}(x-1)^n$ g) $\sum \left(\frac{n-1}{2n}\right)^n x^n$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n+2}$

i) $\sum \frac{\arctan(nx)}{5^n}$ j) $\sum \frac{\cos^n x}{n^3}$ k) $\sum \frac{x^2+\arctan n}{\sqrt{1+n^3x^2}}$ l) $\sum \frac{(n+1)!x^{3n}}{(2n)!}$

2. Determinar todos los valores de x para los que convergen las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{1+n^2}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-1)^{2n}}{1+n^2}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x+2)^{2n}}{1+n^2}$.

3. Precisa para qué x reales convergen las series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(n+1)^2}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8x^3)^n}{(n+1)^2}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)-(8x^3)^n}{(n+1)^2}$.

4. Sin necesidad de hacer ningún cálculo, decidir si el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2-1}$ es $[1,3]$, $[-1,1]$ o $[1,4]$.

5. Precisar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\arctan n}$ para: (a) $x=0$, (b) $x=1$, (c) $x=\mathrm{e}$.

6. Precisar si converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^{2n} x^n$ para: a) $x=-1$ y b) $x=\frac{1}{9}$.

7. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{3n}}{n!}$. Precisar para qué x se puede escribir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{3n}}{n!} = f(x)$ y probar que $f'(1) > 150$.

8. Precisar para qué x reales converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}x^{3n}$, y calcular su suma, si existe, para $x=-1$.

9. Precisar para qué x reales converge la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-4)^n(x-1)^{2n}}{1+2n}$.

10. Esboza las gráficas de las funciones $\frac{\cos\alpha}{e^{\alpha^2}-1}$ y $\frac{\cos\alpha-1}{e^{\alpha^2}}$ para valores de α cercanos a 0.

11. ¿A qué función β^a se parece $\beta^2 e^{3\beta-\beta^3}$ cerca de $\beta = 0$? ¿Y $\beta^2(e^{3\beta-\beta^3} - 1)$? Usando estos resultados, razonar inequívocamente si $\beta^2 e^{3\beta-\beta^3}$ y $\beta^2(e^{3\beta-\beta^3} - 1)$ presentan un extremo o un punto de inflexión en $\beta = 0$.

12. ¿A qué función ax^b, siendo a y b constantes enteras, se parece $f(x) = x \arctan\frac{4}{x^2}$ cuando $x \to \infty$?

13. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor en $x = 0$ de:

a) $\operatorname{sh} x$ b) xe^{-x^2} c) $\dfrac{\log(1+x^2)}{1+x}$ d) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$

e) $\dfrac{1}{a+bx}$ f) $\dfrac{\arctan x}{x} - e^{-x}$ g) $\cos^2 \frac{x}{3}$ h) $(2-x)\sqrt{1+x}$

14. Hallar la suma de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$

15. Calcular los siguientes límites indeterminados cuando x tiende al a indicado:

$a = 0$: a) $\dfrac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^4}$; b) $\dfrac{x - \tan x}{\arctan(x^3)}$; c) $\dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^3}$; d) $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

; e) $\dfrac{\sin x - x}{\log(1+x^3)}$; f) $\dfrac{\sin x \cos x^2 - \sin x}{[\log(1+x)]^3}$; g) $\dfrac{x \arctan(x)}{\sin^2 x}$;

$a = 1$: h) $\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}$; i) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.

$a = \infty$: j) $\dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$; k) $\left[\frac{x+3}{x-3}\right]^x$; l) $x^2 \arctan \frac{1}{x} - \sqrt{1+x}$; m) $x \tan \frac{1}{x}$.

16. Hallar, si existen, los límites cuando $x \to 0$ y $x \to \infty$ de:

a) $(x^2 + \cos x) \arctan \dfrac{1}{x^2}$;

b) $\dfrac{x - \log(1+x)\sqrt{1+x}}{\arctan(x^3)}$;

c) $\dfrac{\arctan x^2 - (e^x - 1)^2}{\log(1+x^3)}$;

d) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\arctan x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

17. Utilizando polinomios de Taylor determinar con un error menor que 10^{-3} el valor de $\cos 1$ y e.

18. Sea $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{1-x^2}}$.

a) Calcula los dos primeros términos no nulos de la serie de Taylor en $x = 0$ de $f(x)$.

b) Indica razonadamente si $f(x)$ presenta un máximo, mínimo o no presenta extremo en $x = 0$.

c) ¿Se puede igualar la serie de Taylor de $f(x)$ en $x = 0$ a $f(x)$ en $x = \pi/2$?

d) Halla $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

19. Determina para qué valor o valores del parámetro real c tiene un extremo local en el origen la función

$$f(x) = x\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - (c - x^3)\sin x.$$

20. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $x - \tan x$ se comporta de forma similar a x^4 para valores de x próximos a cero.

(b) La suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ es e^2.

(c) La serie de Taylor en $x = 0$ de $\arctan x$ representa el valor de $\arctan x$ en todos los reales.

(d) La igualdad $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$ es válida para cualquier real.

21. La cantidad de radiación electromagnética emitida por un cuerpo puede describirse bajo ciertas condiciones a través de la siguiente función:

$$f(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{hc/(\lambda kT)} - 1)},$$

siendo T la temperatura del cuerpo, λ la longitud de onda de la radiación, y h, k y c las constantes de Planck, Boltzmann y la velocidad de la luz, respectivamente.

a) ¿En qué se diferencia la radiación de un cuerpo a temperatura ambiente (en torno a $300K$) de la radiación de una estrella que estuviera a una temperatura aproximada en torno a $5000K$?

b) ¿Puedes encontrar una expresión simplificada para *grandes* longitudes de onda?

c) Estudia el límite de f y de su expresión simplificada calculada en el apartado anterior para *pequeñas* longitudes de onda.

d) Compara el comportamiento con λ de las dos expresiones (exacta y simplificada) a $T = 5000K$.

22. En mecánica relativista, la energía cinética de una partícula es

$$E_c = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right),$$

siendo m_o la masa en reposo de la partícula y v su velocidad. A velocidades *mucho menores* que las de la luz c, dicha energía se puede calcular usando la expresión más simple y conocida $E_c = \frac{1}{2} m_o v^2$. Comparando estas dos expresiones, ¿a qué velocidad estimas que no puedes ignorar los efectos relativistas?