Problema 1. Demostrar las siguientes propiedades de las congruencias:

a) $a \equiv b$ (mod n) y $d \mid n \Rightarrow a \equiv b$ (mod d)

b) $ka \equiv kb$ (mod n) y $k \neq 0 \Rightarrow a \equiv b \ (mod\ \frac{n}{mcd(n,k)})$

c) $a \equiv b$ (mod n) y $a \equiv b$ (mod m) $\Rightarrow a \equiv b$ (mod $mcm(m,n)$)

Problema 2. Encontrar todos los números naturales n que verifiquen

$$97 \equiv 287 \ (\text{mod } n).$$

Problema 3. Demostrar que si p es primo y $a^2 \equiv b^2$ (mod p), se tiene que $p \mid (a + b)$ o $p \mid (a - b)$. ¿Puede decirse lo mismo si p no es primo?

Problema 4. Demostrar que si $n \equiv 3$ (mod 4), entonces n no puede ser suma de cuadrados de dos enteros.

Problema 5. Estudiar la existencia de solución de las ecuaciones que siguen y, en el caso de que tengan solución, calcular todas las soluciones enteras.

(a) $24X \equiv 7$ (mod 40) (b) $13X \equiv 7$ (mod 10) (c) $525X \equiv 237$ (mod 423)

(d) $1215X \equiv 560$ (mod 2755) (e) $2X \equiv 1$ (mod 3) (f) $234X \equiv 3$ (mod 244)

(g) $20X \equiv 30$ (mod 4) (h) $20X \equiv 4$ (mod 30) (i) $3X \equiv 2$ (mod 7)

Problema 6. Encontrar las soluciones enteras de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 3x + 6y & \equiv & 2(mod\ 8) \\ 5x + 3y & \equiv & 0(mod\ 8) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11x + 3y & \equiv & 5(mod\ 7) \\ 3x + 7y & \equiv & 3(mod\ 7) \end{cases}$

Problema 7. Estudiar la existencia de soluciones y, en su caso, resolver:

(a) $\begin{cases} x \equiv 3 & (mod\ 4) \\ x \equiv 5 & (mod\ 7) \\ x \equiv 6 & (mod\ 9) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 7) \\ x \equiv 0 & (mod\ 5) \\ x \equiv 1 & (mod\ 3) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x \equiv 5 & (mod\ 8) \\ x \equiv 1 & (mod\ 20) \\ x \equiv 3 & (mod\ 7) \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x \equiv 2 & (mod\ 5) \\ x \equiv 4 & (mod\ 10) \\ x \equiv 38 & (mod\ 47) \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 3) \\ x \equiv 0 & (mod\ 5) \\ x \equiv 4 & (mod\ 7) \\ x \equiv 5 & (mod\ 27) \\ x \equiv 6 & (mod\ 1233) \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x \equiv 2 & (mod\ 6) \\ x \equiv 4 & (mod\ 8) \\ x \equiv 2 & (mod\ 14) \\ x \equiv 14 & (mod\ 15) \end{cases}$

Problema 8. Estudia para qué números enteros positivos a el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 7) \\ x \equiv 2 & (mod\ 54) \\ x \equiv a & (mod\ 189) \end{cases}$$

Tiene solución y resuélvelo para el menor de todos ellos.

Problema 9. Encontrar un múltiplo de 11 que deja resto 1 dividido por 2, 3, 5 y 7.

Problema 10. Sea n número entero positivo:

a) Demostrar por inducción que $1 + 2 + 3 + \ldots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$

b) Si n es impar, demostrar que $1 + 2 + 3 + \ldots + (n\text{-}1) \equiv 0$ (mod n)

c) ¿Es cierto el resultado del apartado (b) si n es par?

Problema 11. Sea n número entero positivo

a) Demostrar por inducción que s $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}\right)^2$

b) Si n es impar o un número entero positivo divisible por 4, demostrar que

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n\text{-}1)^3 \equiv 0$ (mod n)

c) ¿Es cierto el resultado del apartado (b) si n es par no divisible por 4?

Problema 12. Demostrar, usando únicamente congruencias, que para todo natural n, el número

$$3^{2n+5} + 2^{4n+1}$$

es múltiplo de 7.

Problema 13. Sea n un número entero, demostrar:

a) Si a es par, se verifica $a^2 \equiv 0 \pmod 4$
b) Si a es impar, se verifica $a^2 \equiv 1 \pmod 4$
c) Si a es impar, se verifica $a^2 \equiv 1 \pmod 8$

Problema 14. Un barco pirata naufraga y doce de sus tripulantes consiguen llegar a una isla desierta. Su primera tarea es la de dedicarse a recoger cocos que acumulan en una pila para repartírselos equitativamente a la mañana siguiente. Aunque ninguno dice nada, todos los piratas se dan cuenta de que si se hace el reparto equitativo sobrarían 3 cocos, así que a lo largo de la noche se levantan todos ellos y se comen 3 cocos sin que el resto se entere. Esa misma noche mueren dos piratas y el resto decide repartirse los cocos, descubriendo que esta vez sobran cinco. Explicar por qué se desencadena una trifulca entre los piratas sobrevivientes y encontrar el mínimo número de cocos recogidos por los piratas sabiendo que eran más de quinientos.

Problema 15. Una anciana va al mercado y un caballo pisa su bolsa y rompe los huevos que llevaba en ella. El jinete se ofrece a repararle los daños y le pregunta a la anciana cuántos huevos llevaba. Ella no recuerda el número exacto, pero sí que si los sacaba de dos en dos, finalmente le quedaba uno en la bolsa y lo mismo le ocurría si los sacaba de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco y de seis en seis. Sin embargo, si los sacaba de siete en siete, la bolsa quedaba vacía. ¿Cuál es el menor número de huevos que llevaba la anciana en su bolsa?

Problema 16. Tres agricultores se dividen una cierta cantidad de arroz en partes iguales obteniendo cada uno una cantidad natural de kilos. Cada uno de los agricultores vende su propio arroz en mercados distintos que utilizan pesos de 100 kilos, 45 kilos y 31 kilos y sólo compran múltiplos enteros de estos pesos. ¿Cuál es la menor cantidad de arroz que se han divido los agricultores si regresan a casa con 60, 25 y 15 kilos de arroz respectivamente?

Problema 17.

Problema 18. Dados números naturales n y b, denotemos por $(a_k,\ldots, a_1, a_0)_b$ la representación de n en base b ($n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$). Demostrar que se verifica:

Si d es un divisor de b y, j y k son enteros positivos con $j < k$, $(a_k, \ldots, a_1, a_0)_b$ es divisible por d^j si, y sólo si, $(a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0)_b$ es divisible por d^j.

Problema 19. Encontrar todos los números enteros positivos x que verifican las siguientes condiciones:

a) $6x \equiv 4 \pmod{10}$
b) El resto de dividir x por 8 es igual a $y + 5$, con $y \equiv (1843)^{138648568243871569} \pmod{11}$ y $0 \le y < 11$.

Problema 20. Responder las dos preguntas siguientes:

a) ¿Existe algún número entero $b \in \mathbb{Z}$ que verifique $14b \equiv 5 \pmod{294}$?
b) Sea a un número natural tal que $0 \le a < 500$ y tal que las tres últimas cifras decimales de $17a$ son 001. ¿Qué valor tiene a?

Problema 21. Un sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & (mod\ b_1) \\ x \equiv a_2 & (mod\ b_2) \\ & \vdots \\ x \equiv a_n & (mod\ n) \end{cases}$$

con los módulos b_i distintos y mayores que uno, se dice completo si todo número entero satisface, al menos, una de las congruencias.
Demostrar que son completos los sistemas de congruencias

a) $\begin{cases} x \equiv 0 & (mod\ 2) \\ x \equiv 0 & (mod\ 3) \\ x \equiv 1 & (mod\ 4) \\ x \equiv 1 & (mod\ 6) \\ x \equiv 11 & (mod\ 12) \end{cases}$, b) $\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 2) \\ x \equiv 2 & (mod\ 4) \\ x \equiv 1 & (mod\ 3) \\ x \equiv 8 & (mod\ 12) \\ x \equiv 4 & (mod\ 8) \\ x \equiv 0 & (mod\ 24) \end{cases}$, c) $\begin{cases} x \equiv 1 & (mod\ 2) \\ x \equiv 0 & (mod\ 4) \\ x \equiv 0 & (mod\ 3) \\ x \equiv 2 & (mod\ 12) \\ x \equiv 2 & (mod\ 8) \\ x \equiv 22 & (mod\ 24) \end{cases}$

Problema 22. Deducir los criterios de divisibilidad del 9, del 11, del 5 y del 8.

Problema 23. Sean a y b enteros positivos, demostrar que:

a) el menor resto no negativo de 2^a - 1 módulo 2^b - 1 es 2^r - 1, donde r es el menor resto no negativo de a módulo b.
b) El máximo común divisor de 2^a - 1 y 2^b - 1 es $2^{mcd(a,b)} - 1$.
c) 2^a - 1 y 2^b - 1 son coprimos si, y sólo si, a y b son coprimos.