Problemas del Tema 6

Vamos a aprovechar los problemas del tema 6 para aplicar cambios de variable en funciones de densidad de probabilidad dependientes de una y de varias variables. En el caso de una función de densidad de probabilidad dependiente de una única variable ya hemos mencionado que bajo el cambio $x \to y = y(x)$ la función de densidad de probabilidad $f(x)$ se transforma en $g(y)$, dada por

$$g(y) = f[x(y)]\frac{dx(y)}{dy}$$

Este tipo de cambios de variable es muy habitual en física. Por poner un ejemplo veamos un caso relacionado con física atmosférica: distribución de tamaños de gotas en una nube. Supongamos que $n(r)$ es el número de gotas con radio r por unidad de volumen (este tipo de información es lo que obtendríamos si medimos esta densidad con métodos ópticos). Nos preguntamos cuál es la probabilidad de encontrar una gota con volumen v, cuál es el volumen promedio y cuál es la desviación estándar en términos del volumen. Para responder a estas preguntas primero calculamos la función de densidad de probabilidad en función del radio r, dada por la función de distribución de gotas por unidad de volumen $n(r)$ dividida por el número total de gotas por unidad de volumen (es decir, normalizada)

$$f(r) = \frac{n(r)}{\int_0^\infty n(r)\, dr}$$

Una vez calculada esta función de densidad de probabilidad aplicamos el cambio de variable $r \to v = (4\pi/3)r^3$ y calculamos $g(r)$. Ahora ya sólo nos queda aplicar las funciones previamente programadas para calcular $\langle v \rangle$ y la desviación estándar en términos de v. (En este caso el intervalo de valores posibles del radio es $r \in (0, \infty)$, que se traduce en el mismo intervalo al describir esta población en términos de v).

Ejercicio 1

Escriba una función en Maxima que aplique cambios de variable sobre funciones de densidad de probabilidad en una variable.

input:
- Función de densidad de probabilidad en términos de x.
- Intervalo de valores posibles de x.
- Cambio de variable $y = y(x)$.

output:
- Función de densidad de probabilidad en términos de y.

- Intervalo de valores posibles de y.

Para hacer este ejercicio deberá despejar x en función de y resolviendo $y = y(x)$. Programe esta parte suponiendo que es posible resolver esta ecuación de forma analítica.
Para determinar el intervalo de valores posibles de y suponga que la función $y = y(x)$ es o bien estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente.

La generalización de este método al caso de n varibles es muy sencilla. Tenemos n variables aleatorias continuas $(x_1, \dots, x_n)$ descritas por la función de densidad de probabilidad $f(x_1, \dots, x_n)$, y queremos describir esta función en términos de otro conjunto de variables nuevas $(y_1, \dots, y_n)$, dadas como funciones de las antiguas: $y_i = y_i(x_j)$, con $i, j = 1, \dots, n$. Lo único que tenemos que hacer es invertir el sistema anterior para calcular $x_i = x_i(y_j)$, con $i, j = 1, \dots, n$ y posteriormente calcular cómo cambia el elemento diferencial de volumen al aplicar este cambio de variable, es decir, el equivalente al factor $dx(y)/dy$ pero con n variables. Al aplicar un cambio de variable en n dimensiones la variación de volumen del elemento diferencial de volumen está dada por el determinante Jacobiano

$$J = \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Por tanto, en el caso general con n variables, al aplicar el cambio $y_i = y_i(x_j)$, con $i, j = 1, \dots, n$ la función de densidad de probabilidad $f(x_1, \dots, x_n)$ se transforma en $g(y_1, \dots, y_n)$ dada por

$$g(y_1, \dots, y_n) = f[x_1(y_i), \dots, x_n(y_i)] \cdot J$$

Una vez hemos calculado la función de distribución en términos de las y_j podemos obtener cualquier resultado en función de estas variables. Por ejemplo, supongamos que nos interesa saber cuál es la función de densidad de probabilidad de la primera variable y_1, independientemente de los valores de todas las restantes. Suponiendo que g está debidamente normalizada, esta función está dada sencillamente por

$$g(y_1) = \int dy_2 \int dy_3 \dots \int dy_n \, g(y_1, \dots, y_n)$$

Una vez calculada $g(y_1)$ es inmediato calcular el valor promedio de y_1 o la dispersión de y_1.

Para ilustrar el caso de n variables en lugar de escribir una función para el caso general vamos a resover un problema concreto:

Ejercicio 2

Dada una función de distribución de velocidades de las moléculas de un gas escriba una función en Maxima que calcule la función de distribución de energía cinética de las moléculas del gas.

input:
- Función de densidad de probabilidad en términos de las componentes cartesianas de la velocidad $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

output: • Función de densidad de probabilidad en términos de la energía cinética $E = (1/2)mv^2$.

Para hacer este ejercicio suponga que todas las moléculas del gas tienen la misma masa m. El intervalo de valores posibles de las componentes de la velocidad es $v_i \in (-\infty, +\infty)$ y el de la energía cinética es (obviamente) $E \in (0, \infty)$. Los pasos que deben darse para hacer este ejercicio son los siguientes:

- Aplicar el cambio de variable de cartesianas a esféricas. Con esto pasamos de la función de densidad de probabilidad en términos de las componentes cartesianas de la velocidad $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ a la densidad de probabilidad en términos del módulo de la velocidad v y de los dos ángulos (θ, ϕ) que definen la orientación del vector velocidad.
- Integramos la función de distribución obtenida en el apartado anterior respecto de θ y ϕ para todos los valores posibles de estos ángulos. Con esto obtenemos la función de densidad de probabilidad en términos del módulo de la velocidad v, independientemente de su orientación.
- Aplicamos el cambio de variable $E = (1/2)mv^2$