Sabemos que la autonomia de un coche con la reserva de combustible sigue una distribución exponencial de media 120 km.

Durante un largo viaje nos fijamos que está encendido el testigo de la reserva, pero no sabemos cuantos km hemos recorrido desde que se activó.

Debemos recorrer 30 km para repostar.

¿Podrermos hacerlo sin que se pare el coche por falta de combustible?

Perdida de memoria $P(X \geq t+s \mid X \geq s) = P(X \geq t)$

Tiempo medio de fallo 120 km, Tiempo de fallo $\sim \exp(\lambda=1/120)$

$$P(X \geq 30) = 1- P(X \leq 30) = 1- F(30)= 1-(1-e^{-30/120}) = e^{-30/120} = 0.7788$$

Dos individuos, A y B, necesitan un trasplante de riñón.
Si no recibe un nuevo riñón,
A morirá después de un tiempo exponencial con tasa μ_A
y B después de un tiempo exponencial de tasa μ_B.

Los riñones llegan según un Proceso de Poisson de tasa λ.
Se ha decidido que el primer riñón será para A
o para B si B está vivo y A ya no lo está y
el siguiente para B si todavía vive.

a. *¿Cuál es la probabilidad de que A obtenga un nuevo riñón?*

$T_A \sim \exp(\mu_A)$, $T_R \sim \exp(\lambda)$

A sobrevive durante la espera: $T_A \geq T_R$

$P(T_A \geq T_R) = \lambda / (\mu_A + \lambda)$

b. *¿Cuál es la probabilidad de que B obtenga un nuevo riñón?*

B sobrevive durante la espera: recibe el riñon que llega primero o
recibe el riñon que llega segundo

$T_{R1}, T_{R2} \sim \exp(\lambda)$

B_1: recibe el riñon que llega primero: $T_{R1} < T_B$ y $T_A < \min(T_{R1},T_B)$
B_2: recibe el riñon que llega segundo: $T_{R2} < T_B$ y $T_{R1} < \min(T_A,T_B)$

B sobrevive durante la espera: $P(B_1) + P(B_2)$

$P(T_{R1} < T_B$ y $T_A < \min(T_{R1}, T_B)) = P(T_{R1} < T_B) * P(T_A < \min(T_{R1}, T_B))=$
$\lambda/(\lambda + \mu_B) * \mu A /(\lambda + \mu_A + \mu_B)$

$P(T_{R2} < T_B$ y $T_{R1} < \min(T_A, T_B)) = P(T_{R2} < T_B) * P(T_{R1} < \min(T_A, T_B)) =$
$\lambda/(\lambda + \mu_B) * \lambda /(\lambda + \mu_A + \mu_B)$

$P($ B sobrevive durante la espera$) = \lambda/(\lambda + \mu_B) * (\lambda+ \mu_A) /(\lambda + \mu_A + \mu_B)$

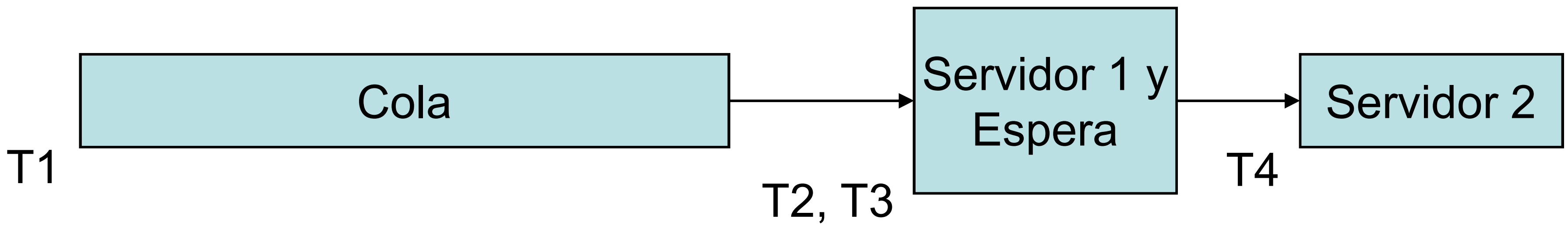
En cierto sistema un cliente debe de ser servido primero por el servidor 1 y después por el servidor 2.

El tiempo de servicio en el procesador i es una exponencial con tasa μ_i*, i=1,2. Una llegada que encuentra el servidor ocupado espera en cola a ser servido. Cuando un cliente termina con el servidor 1, pasa al servidor 2 si éste está libre. Si el servidor 2 está* ocupado *el cliente se queda en el servidor 1 impidiendo que sea servido otro cliente hasta que el servidor esté libre.*

Los clientes salen del sistema después de ser atendidos por el servidor 2.

a. *Si al llegar hay un cliente en el sistema al que está atendiendo el servidor 1 ¿cuál es el tiempo total esperado que pasarías en el sistema?,*

Tiempo total esperado en el sistema: T = T1+T2+T3+T4



$E[T] = E[T1+T2+T3+T4] = E[T1]+E[T2]+E[T3]+E[T4]$

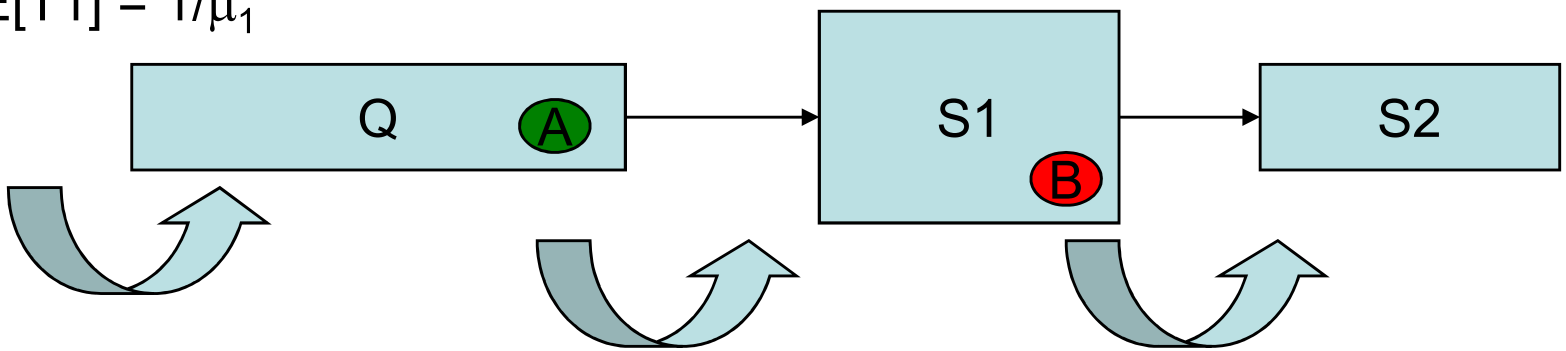
Análisis de los tiempos medios, con un cliente siendo servido en el Servidor 1

T1: Como al llegar el individuo *A* el servidor está ocupado deberá esperar, en la cola, a que el servidor se desaloje.

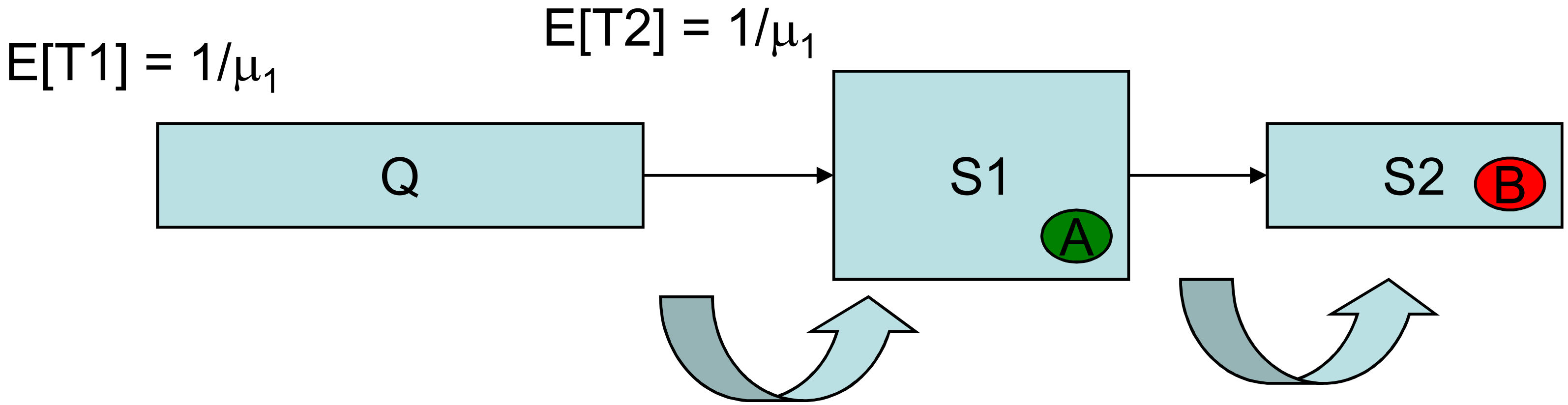
En este caso es suficiente que *B* termine de ser tratado en 1, ya que, al estar libre el servidor 2, *B* puede pasar sin ninguna demora al siguiente proceso liberando el servidor.

Por otra parte, al tratarse de un tiempo de servicio exponencial, la esperanza de duración del servicio es independiente del tiempo que llevara *B* siendo atendido cuando *A* llegó al sistema.

$E[T1] = 1/\mu_1$



T2: El tiempo que tarda en ser servido en el servidor 1 sigue una distribución exponencial, por lo que



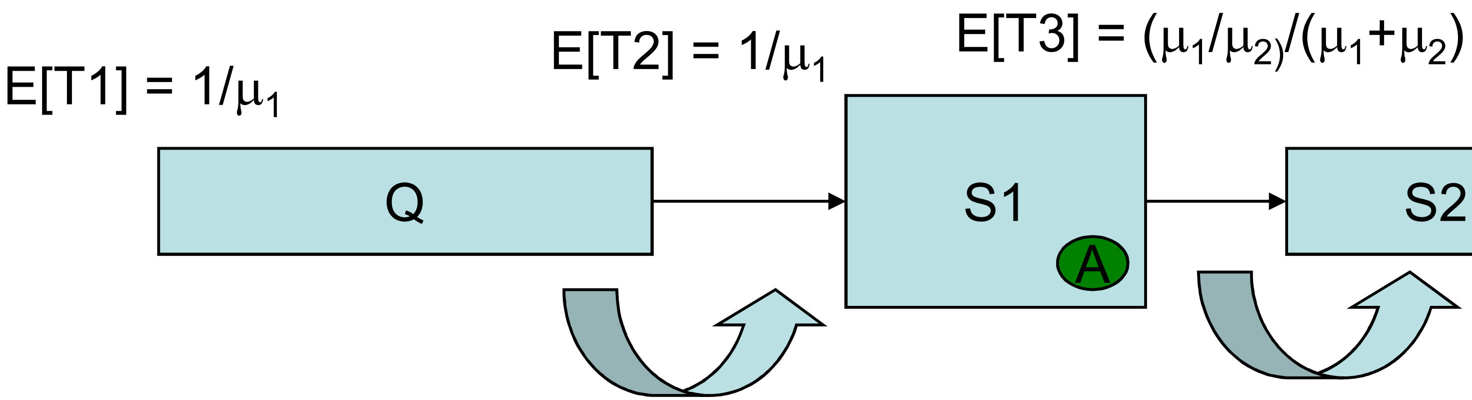
T3: Cuando *B* abandonó el servidor 1,
pasó a ser servido en el servidor 2.
Por lo tanto se plantean dos posibilidades.

- Si *B* ha tardado menos en ser servido que *A*, esto quiere decir que ha dejado el servidor libre y por tanto *A* no tendrá que esperar a que se libere.
- Por contra, si *B* tarda más que *A*, éste tendrá que esperar.

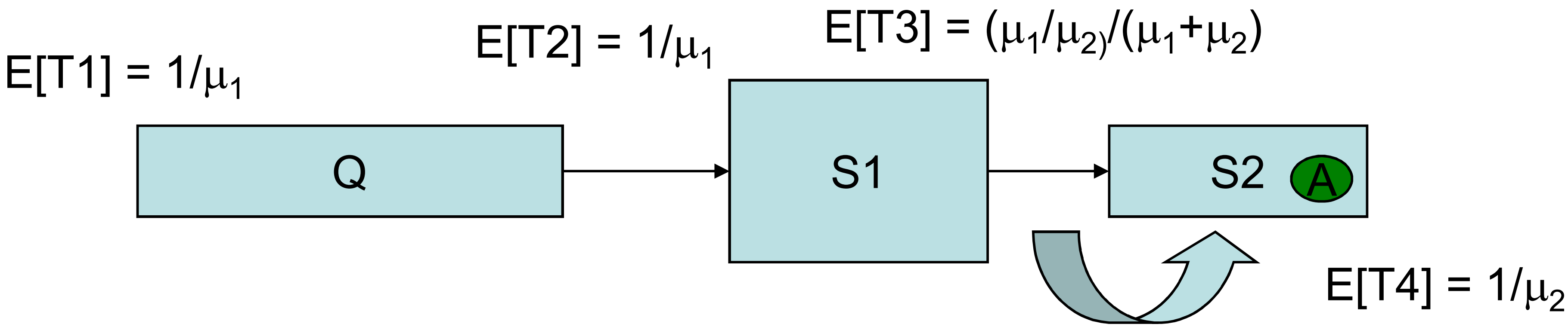
La propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial nos indica que el tiempo esperado hasta que acabe el servicio, será el mismo que si acabara de empezar ($1/\mu_2$).

Por otro lado, la probabilidad de que *B* termine antes viene dada por la expresión ($\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$) con lo que resulta

$$E[T3] = 0 * \mu_1/(\mu_1+\mu_2) + 1/\mu_2 * (1-\mu_1/(\mu_1+\mu_2))$$



T4: Finalmente, el tiempo que tarda en ser servido en el servidor 2 sigue una distribución exponencial, por lo que



El tiempo esperado que *A* pasará en el sistema es

$$E[T] = 2/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1+\mu_2) + 1/\mu_2$$

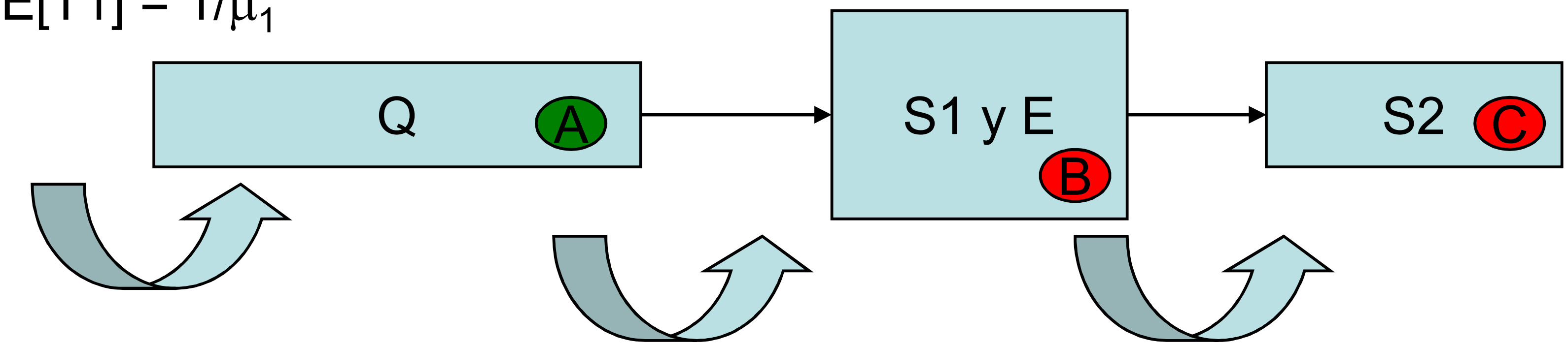
b. *¿y si al llegar están los dos servidores ocupados?*

Análisis de los tiempos medios, con un cliente siendo servido en cada Servidor

La diferencia con el caso anterior radica en el tiempo que *A* tendrá que esperar hasta que *B* deje libre el Servidor 1 (T1).
El resto de tiempos intermedios es idéntico al caso anterior.
Se pueden dar dos posibilidades (que debemos promediar):

- *B* ya ha sido servido y está esperando a que acabe *C* en el Servidor 2.
- *B* está siendo servido en el momento de la llegada de *A*.

$E[T1] = 1/\mu_1$



En el primer caso,

•*B* ya ha sido servido y está esperando a que acabe *C* en el Servidor

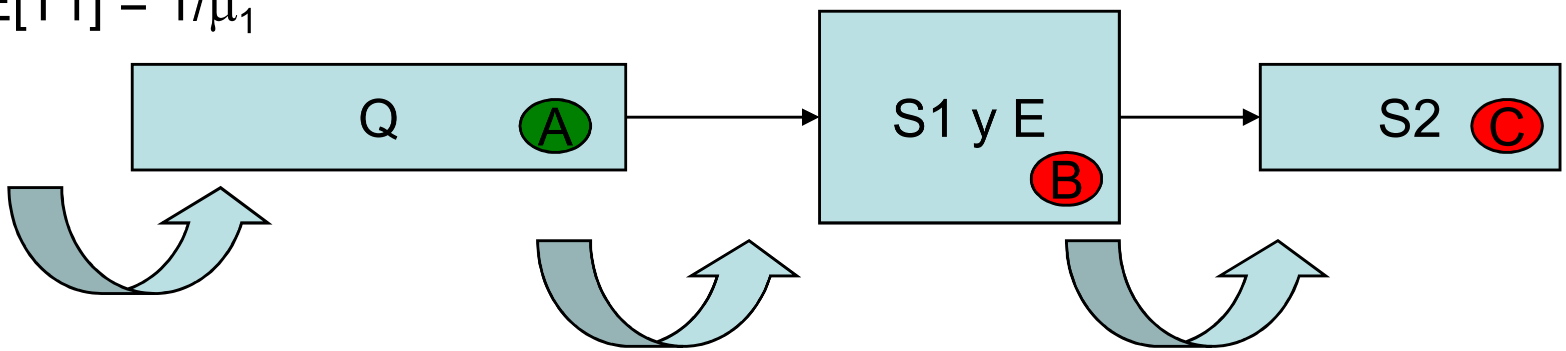
el tiempo medio que se tardará en desalojar el servidor
coincidirá con el tiempo medio de servicio del segundo servidor ($1/\mu_2$).

En el segundo caso,

•*B* está siendo servido en el momento de la llegada de *A*.

se deberá tener en cuenta el tiempo que tardará *B* en ser servido (T2) y
el tiempo que potencialmente pasará esperando a que termine C (T3).

$E[T1] = 1/\mu_1$



Para calcular la probabilidad de estos casos tendremos en cuenta que el tiempo total esperado que *B* permanezca en el Servidor 1, tal como se ha calculado anteriormente es

$$E[T2] + E[T3] = 1/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1+\mu_2)$$

La probabilidad de que un individuo que se encuentra en el Servidor 1 esté siendo servido supuesto que el Servidor 2 está ocupado será

$$E[T2] / (E[T2]+E[T3]) = (1/\mu_1) / (1/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1+\mu_2))$$

Y de que esté esperando

$$E[T3] / (E[T2]+E[T3]) = ((\mu_1/\mu_2)/(\mu_1+\mu 2)) / (1/\mu_1 + (\mu_1/\mu_2)/(\mu_1+\mu_2))$$

P(B sirviendose en S1 | C en S2)

B sirviendose

B esperando

$$E[T_1] = \frac{\frac{1}{\mu_1}}{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}\right)}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}\right) + \frac{\frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}}{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}\right)}\frac{1}{\mu_2} =$$

$$= \frac{1}{\mu_1} + \frac{\frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2^2}}{\frac{(\mu_1+\mu_2)\mu_2+\mu_1^2}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2\mu_1}} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2\left(\mu_1^2+\mu_2(\mu_1+\mu_2)\right)}.$$

C sirviendose

P(B esperando en S1 | C en S2)

Y el resto de tiempos son iguales:

$$E[T] = \frac{2}{\mu_1} - \frac{\mu_1^2}{\mu_2\left(\mu_1^2+\mu_2(\mu_1+\mu_2)\right)} + \frac{\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2} + \frac{1}{\mu_2}.$$

Sean X e Y dos Procesos de Poisson independientes de tasas λ_1 y λ_2 llegadas a la hora respectivamente, que describen las llegadas de dos tipos de trabajos en un sistema.

Calcular:

a. *La probabilidad de que un trabajo de tipo 1llegue antes que un trabajo de tipo 2.*

b. *La probabilidad de que lleguen en una hora 4 trabajos.*

c. *Suponiendo que han llegado 4 trabajos.*
¿Cuál es la probabilidad de que los sean de tipo?

a.

$$T_X \sim Exp(\lambda_1),$$

$$T_Y \sim Exp(\lambda_2).$$

$$P(T_X < T_Y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

b. Sea W el proceso obtenido como suma de X e Y.
Sabemos que W se distribuye como un Proceso de Poisson de tasa λ1 + λ_2

Así,

$$P(W(t+1) - W(t) = 4) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^4}{4!}.$$

c. La probabilidad de que un suceso cualquiera
del proceso W sea del tipo 1 es

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Además, para cada suceso esta probabilidad es
idéntica e independiente del resto de sucesos.

Así, la probabilidad de que
cuatro sucesos sean de tipo 1 será

$$(p_1)^4 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^4.$$

El número de demandas que cierta compañía de seguros debe afrontar sobre sus pólizas sigue un Proceso de Poisson de tasa $\lambda=5$ *por semana.*
Si la cantidad de dinero pagado por cada póliza se distribuye exponencialmente con media 2000 euros,

¿cuál es la media y la varianza de la cantidad de dinero pagado por la compañía en cuatro semanas?

El problema planteado se corresponde con un **proceso de Poisson compuesto** donde $\{ N(t), t > 0\}$ se corresponde con el número de pólizas recibidas e $\{ Y_n, n > 0\}$ son la familia de variables aleatorias que modelizan la cantidad pagada en cada una de estas pólizas.
$\{ Y_n, n > 0\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de forma exponencial con tasa 1/2000.

Denotemos W(t) como la variable aleatoria que refleja la cantidad de dinero abonada por la compañía en tiempo t. De esta forma

$$W(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

Calculamos ahora la esperanza de W(4)

$$E[W(4)] = \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[W(4)\ \Big|\ N(4)=n\Big] P(N(4)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] P(N(4)=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} E[Y_i]\right) P(N(4)=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \times 2000 \times P(N(4)=n) = 2000 \sum_{n=0}^{\infty} n \times P(N(4)=n) =$$

$$= 2000 \times E[N(4)] = 5 \times 4 \times 2000 = 40000 \textit{ euros.}$$

Calculamos ahora la varianza de W(4)

$$Var(W(4)) = E\left[Var\left(W(4) \mid N(4)\right)\right] + Var\left(E\left[W(4) \mid N(4)\right]\right).$$

$$Var\left(E\left[W(4) \mid N(4) = n\right]\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = nVar(Y_i) = n \times 2000^2 \Rightarrow$$

$$E\left[Var\left(W(4) \mid N(4)\right)\right] = E[N(4)] \times 2000^2 = 5 \times 4 \times 2000^2 = 8 \times 10^7$$

$$Var(E[W(4)|N(4)]) = Var(N(4)E[Y]) = (E[Y])^2 Var(N(4)) =$$

$$= (2000)^2 \times 4 \times 5 = 8 \times 10^7$$

$$Var(W(4)) = 8 \times 10^7 + 8 \times 10^7 = 16 \times 10^7.$$

La llegada de clientes a una tienda se rige por un proceso de Poisson no homogéneo cuya función de intensidad a lo largo del día se muestra en la siguiente figura:

Los clientes pueden ser de dos tipos:
jóvenes o adultos.

La proporción observada de clientes de cada uno de los tipos es
30% de jóvenes y 70% de adultos.

El gasto medio por persona en la tienda es de
12 euros para los jóvenes y 21 euros para los adultos.

Determinar:

a. Los ingresos esperados a. *en la tienda a lo largo del día.*

b. *La probabilidad de que entre las : y las : horas lleguen jóvenes.*

c. *Supuesto que a lo largo del día han llegado personas,*
¿cuál es la probabilidad de que el quinto adulto haya llegado antes que el tercer joven?

a. Para poder estimar los ingresos esperados a lo largo del día deberemos calcular el número medio de clientes esperado.

Del gráfico del enunciado se tiene que

$$\lambda(t) = \begin{cases} t - 7, & \text{si } 10 \leq t \leq 12 \\ 2t \quad 19, & \text{si } 12 \leq t \leq 14 \\ 9, & \text{si } 14 \leq t \leq 16 \\ 25 - t, & \text{si } 16 \leq t \leq 21 \end{cases}$$

$$m(t) = \int_{10}^{t} \lambda(s)ds = \begin{cases} \int_{10}^{t}(s-7)ds = \dfrac{t^2}{2} - 7t + 20, & \text{si } 10 \leq t \leq 12 \\ \int_{10}^{12} \lambda(s) + \int_{12}^{t}(2s - 19)\, ds = t^2 - 19t + 92, & \text{si } 12 \leq t \leq 14 \\ \int_{10}^{14} \lambda(s) + \int_{14}^{t} 9\, ds = 9t - 104, & \text{si } 14 \leq t \leq 16 \\ \int_{10}^{16} \lambda(s) + \int_{16}^{t}(25 - s)\, ds = -\dfrac{t^2}{2} + 25t - 232, & \text{si } 16 \leq t \leq 21 \end{cases}$$

El número medio de clientes al día

$$m(21) - m(10) - \left(-\frac{21^2}{2} - 25 \times 21 - 232\right) - 0 - 72.5.$$

Teniendo en cuenta la distribución del tipo de clientes y el gasto esperado por cada uno de ellos

$$E[Ingresos] = 72.5 \times (0.3 \times 12 + 0.7 \times 21) = 1326.75 \text{ euros.}$$

b. Denominamos $m_j(t)$a la función de valor medio de llegadas de jóvenes a la tienda.

Así, se tiene que $m_j(t) = 0.3 * m(t)$. con lo que

$$
\begin{aligned}
P\left(5 \text{ jóvenes en } [11:00 - 15:00]\right) &= P(N_j(15) - N_j(11) = 5) \\
&= e^{-(m_j(15)-m_j(11))}\frac{(m_j(15) - m_j(11))^5}{5!} = \\
&= e^{-(9.3-1.05)} - \frac{(9.3 - 1.05)^5}{5!} = \\
&= e^{-8.25} - \frac{8.25^5}{5!} \simeq 0.083.
\end{aligned}
$$

c. La probabilidad de que el quinto adulto llegue antes que el tercer joven coincide con la probabilidad de que entre los primeros 7 clientes que lleguen haya 5 ó más adultos, que, teniendo en cuenta la probabilidad de que los clientes que lleguen sean jóvenes ó adultos, vendrá dado por la expresión

$$\sum_{n=5}^{7} P\left(n \text{ adultos en las 7 primeras llegadas}\right) = \sum_{n=5}^{7} \binom{7}{n} 0.7^{n} \times 0.3^{7-n} =$$

$$= \sum_{n=5}^{7} \frac{7!}{n! \times (7-n)!} 0.7^{n} \times 0.3^{7-n}$$

$$= 0.318 + 0.247 + 0.082 = 0.647$$