

Problema 1. Dada la función $f(x) = \ln(1 + x)$

- Hallar el polinomio de Taylor de grado n en el punto $x_0 = 0$.
- Calcular el valor de $\ln(1'1)$ con un error que sea una diezmilésima.
- Calcular $\ln(1'1)$ con el polinomio de Taylor de grado 4, encontrando una cota para el error que se comete.
- Calcular $\ln(1'1)$ con el polinomio de Taylor de grado 5, encontrando una cota para el error que se comete.

Problema 2. Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$

- Hallar el polinomio de Taylor de grado n en el punto $x_0 = 4$.
- Calcular el valor de $\sqrt{4'3}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 3.
- Acotar el error cometido en la aproximación realizada en el apartado b).

Problema 3. Calcular $e^{0'23}$ con un error menor que 10^{-3}

Problema 4. Dada la función $f(x) = x \cdot \ln(x)$

- Calcular el polinomio de Taylor de grado n en el punto $x_0 = 1$.
- Evaluar $f(1'15)$ con el polinomio de Taylor de grado 3, acotando el error cometido.
- Calcular $1'15 \cdot \ln(1'15)$ con un error menor que una milésima.

Problema 5. Calcular el error que se comete al evaluar $\sin(0'3)$ mediante el polinomio de Taylor de grado 5.

Problema 6. Hallar el valor de a en las siguientes funciones, de forma que los polinomios interpoladores sean de grado 3:

- $f(0,64)=0,417$; $f(0,65)=0,533$; $f(0,66)=0,632$; $f(0,67)=a$; $f(0,68)=0,887$
- $f(-1)=6$; $f(0)=a$; $f(1)=4$; $f(2)=0$; $f(3)=42$
- $f(-1)=5$; $f(0)=2$; $f(1)=a$; $f(2)=0$; $f(3)=1$

Problema 7. Hallar las fórmulas de Newton (ascendente y descendente) para las siguientes funciones:

- $f(0)=5,2$; $f(1)=8,0$; $f(2)=10,4$; $f(3)=12,4$; $f(4)=14,0$; $f(5)=15,2$
- $f(0)=2,2$; $f(1)=4,1$; $f(2)=11,2$; $f(3)=12,0$; $f(4)=8,0$

Problema 8. Sabiendo que la suma $1^k+2^k+\dots+n^k$ es un polinomio de grado $k+1$, hallar:

- $1^2+2^2+\dots+n^2$
- $3^3+4^3+\dots+n^3$

Problema 9. Sabiendo que $\log_{10}1000=3$, $\log_{10}1010=3,0043214$, $\log_{10}1020=3,0086002$; $\log_{10}1030=3,0128372$; $\log_{10}1040=3,0170333$; $\log_{10}1050=3,0211893$, hallar una aproximación de $\log_{10}1044$.

Problema 10. Buscar los valores de $\sin 15^\circ$, $\sin 20^\circ$, $\sin 25^\circ, \dots$, $\sin 55^\circ$, y hallar los valores aproximados de $\sin 14^\circ$ y $\sin 56^\circ$. Hacer una estimación del error y compararla con el error real (hallado con la calculadora).

Problema 11. Dada la siguiente tabla, hallar $f(78^\circ30')$:

X	75°	76°	77°	78°	79°	80	81°
F(x)	2,76806	2,83267	2,90256	2,97857	3,06173	3,1539	3,25530

Problema 12. Hallar los polinomios interpoladores para las siguientes tablas:

a)

x_k	-1	0	3	4	5
$f(x_k)$	2	1	4	4	6

b)

x_k	-1	0	2	5
$f(x_k)$	2	0	4	7

c)

x_k	-1	0	1	2	4
$f(x_k)$	3	3	5	1	3

d)

x_k	-1	-0,5	0	1	2	4
$f(x_k)$	3	-4	3	5	1	3

Problema 13. En los ejemplos del ejercicio anterior añadir el punto (3,2) y hallar los nuevos polinomios interpoladores.

Problema 14. Sabiendo que $\text{sen } 0,3=0,29552$, $\text{sen } 0,32=0,31457$ y que $\text{sen } 0,35=0,34290$, hallar un valor aproximado para $\text{sen } 0,34$.

Problema 15. Repetir las cuentas del problema anterior, añadiendo el dato conocido $\text{sen } 0,33=0,32404$

Problema 16. Los siguientes datos corresponden a la función $f(x)=e^{x^2-1}$

x_k	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
$F(x_k)$	1,000	1,23368	1,55271	1,99372	2,61170

Utilizarlos para hallar $f(1,25)$. Hallar una cota del error.

Problema 17. El polinomio $p_3(x) = 2 - (x + 1) + x(x + 1) - 2x(x + 1)(x - 1)$ interpola a los primeros cuatro datos de la tabla

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	2	1	2	-7	10

Añadir un término más a $p_3(x)$ de manera que el polinomio resultante interpole a la tabla entera.

Problema 18. Encontrar las fórmulas de Lagrange y de Newton del polinomio de interpolación para los siguientes datos:

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	0	1	-1

Escribir ambos en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$ para ver que son idénticos.

Problema 19. Hallar el polinomio de interpolación de grado ≤ 2 a la función $f(x) = \cos(x)$ en los puntos $x = 0, 1/2, 1$. Calcular el error de interpolación y dar una cota del error cometido en $x = 3/4$.

Problema 20. Hallar los cinco primeros términos no nulos de los desarrollos de Taylor de las siguientes funciones:

(a) e^{3x} (b) $e^x \sin x^2$ (c) $\tan(3x)$ (d) $\sin^3 x$ (e) $\frac{\text{sen } x}{x} x$ (f) $\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x}$

Problema 21. El peso específico p del agua a diversas temperaturas centígradas t es

T	0	1	2	3
P	0.999871	0.999928	0.999969	0.999991

Aproxime el valor en $t = 4$ usando la forma de Lagrange con la interpolación lineal en 2 y 3, la interpolación cuadráticas en 1,2 y 3 y finalmente la cúbica en 0,1,2 y 3.

Problema 22. Encontrar el polinomio interpolador por el método de Newton de las diferencias divididas para los siguientes datos

- $f(-1)=5, f'(-1)=1, f(0)=3, f'(0)=5, f(1)=2, f'(1)=4$
- $f(-1)=5, f'(-1)=1, f''(-1)=3, f(0)=5, f(1)=2, f'(1)=4$
- $f(-1)=5, f'(-1)=1, f''(-1)=3, f'''(-1)=6, f(1)=3, f(2)=4$
- $f(-2)=-138, f'(-2)=-234, f(1)=24, f'(1)=72, f''(1)=92, f'''(1)=540$
- $f(-2)=-138, f(1)=24, f'(1)=72, f''(1)=92, f'''(1)=540, f^4(1)=1776$